Tache Alexandru - Petre

Reprezentări liniare complexe finit Dimensionale

de grupuri finite

Editura Sfântul Ierarh Nicolae

ISBN 978-606-577-016-4

Referent ştiinţific:

Prof. Univ. Dr. Dorin Popescu

Cuprins

Capitolul 1

Notiuni introductive

1.1 Idei matematice premergatoare teoriei reprezentarilor liniare

Notiunea matematica de grup, asa cum este ea inteleasa astazi, are la baza procesul de conceptualizare – realizat cu preponderenta in a doua jumatate a secolului 19 – bazat pe abstractizarea mai multor idei comune unor ramuri importante dar separate ale matematicii, studiate sistematic si aproximativ in acelasi timp. Mai exact, studiul *geometriei in n dimensiuni* si al *geometriilor proiective si ne-euclidiene* pe de o parte, cercetarea *formelor patratice* in incercarea de a rezolva anumite probleme de scriere a numerelor naturale ca sume de patrate perfecte pe de o alta si studierea permutarilor in legatura directa cu *problema rezolvarii ecuatiilor polinomiale prin radicali* pe de o a treia, au condus in mod firesc la aparitia definitiei abstracte a grupului. Sintetizand, putem spune ca grupurile (finite) de permutari S_n si grupurile de transformari geometrice (in special cele de transformari liniare – $Gl_n(K)$) reprezinta acele exemple concrete care au jucat un rol esential in istoria aparitiei conceptului de grup abstract. (Mai multe detalii legate de formarea notiunii de grup se pot gasi in eseurile *History of group theory* si *The abstract group concept* aflate la pagina de internet [12], subsectiunea `/history/Indexes/Algebra.html`)

Istoria matematicii arata clar ca fenomenul aparitiei acestei notiuni nu este singular, ci se inscrie intr-o tendinta evolutiva generala ce a avut la baza procese similare de iesire la suprafata a conceptelor prin abstractizare la capatul carora au aparut *structuri* algebrice (grup, corp, inel ↔ ideal, spatiu vectorial ↔ modul, algebra etc.), geometrice (varietate diferentiala ↔ varietate riemanniana ↔ varietate complexa; spatiu afin ↔ spatiu proiectiv etc.) si analitice (spatiu topologic ↔ spatiu metric ↔ spatiu cu masura, spatiu Hilbert, etc.) devenite azi notiuni clasice ale matematicii moderne[1].

[1] Pentru o imagine a interactiunilor ulterioare dintre aceste structuri pot fi consultate sectiunile conclusive ale capitolelor V – X si sectiunile 1 – 4 ale ultimului capitol din [5]

Asadar, in urma unui proces de abstractizare intins pe perioada a cel putin trei generatii ia nastere conceptul de grup, pentru ca studiile matematice posterioare sa confirme importanta de prim rang a acestuia. Pe cale de consecinta, apare nevoia studierii sistematice acestui obiect-concept matematic de noutate absoluta. In acest sens, unele din primele incercari legate de cercetarea de profunzime a grupurilor (si in special a grupurilor finite) au drept metoda comuna intoarcerea programatica de la abstract la concret inspirata de exemplele precise mai sus mentionate (S_n, $Gl_n(K)$) si modelata matematic cu ajutorul notiunii de morfism. La nivel formal, aceasta metoda este exprimata de definitia si remarcile imediat urmatoare.

1.2 Reprezentari liniare, reprezentari matriceale si structura de modul indusa

Definitia 1.1. Fie G un grup de studiat (cu un numar finit sau infinit de elemente) si fie S o multime organizata dupa o structura algebrica data. Numim *reprezentare* (sau realizare) *a lui G prin automorfismele lui S* orice morfism de grupuri:

$$\varphi : G \longrightarrow Aut(S),$$

unde prin $Aut(S)$ intelegem grupul automorfismelor multimii S in raport cu structura algebrica data.

Spus in cuvinte, obiectul matematic mai sus definit desemneaza o *ipostaziere* a unui grup ca un subgrup de automorfisme ale unei anumite structuri algebrice. Talcul acestei definitii sta in faptul ca ea propune spre studiu inclusiv (dar de fapt mai ales) acele realizari ,,inexacte” ale grupului de studiat in grupuri de automorfisme, adica acele reprezentari pentru care grupul de studiat nu este neaparat acelasi[2] cu realizarea lui. Formal spus: morfismul φ nu este restrictionat la a fi injectiv.

Ce se pierde si ce se castiga printr-o astfel de abordare? Dezavantajul este evident: studiul reprezentarilor ,,inexacte” ale unui grup nu poate dezvalui in sine intreaga bogatie conceptuala a notiunii de grup. Potentialul avantaj este dat, asa cum se va vedea si pe parcursul acestei lucrari, de facilitarea descoperirii unor clase largi de proprietati profunde ale grupurilor (finite) data de limitarea la studiul unor realizari concrete in grupuri de automorfisme precise (precum S_n si $Gl_n(K)$).

In acord cu cele discutate in paragrafele introductive, doua cazuri particulare ale notiunii mai sus definite se cer a fi mentionate.

[2] a se citi *izomorf*

Remarca 1.1. În cazul in care S este o multime amorfa, adica

$$Aut(S) = \{f : S \to S \mid f \text{ este bijectiva}\},$$

spunem ca φ este o *actiune* a grupului G pe multimea S. Cercetarea acestui caz particular de reprezentare intreprinsa de catre Peter Ludwig Mejdell Sylow a dus la publicarea, in anul 1872, unor rezultate cunoscute ulterior sub denumirea de *teoremele lui Sylow*[3]. Descoperirile lui P. Sylow au fost incadrate ulterior in istoria matematicii, alaturi de rezultatul lui Joseph-Louis Lagrange care leaga ordinul unui subgrup al unui grup finit de ordinul grupului[4], drept primele rezultate cu caracter general din teoria grupurilor finite.

Remarca 1.2. Daca S este un spatiu vectorial peste un corp K, atunci

$$Aut(S) = \{f : S \to S \mid f \text{ este } K\text{−liniara si bijectiva}\}.$$

Spunem in acest caz ca φ este o *reprezentare liniara* a grupului G in ${}_KS$. Totodata, daca spatiul vectorial dat are dimensiune finita n, numim *gradul reprezentarii* dimensiunea n a spatiului ${}_KS$.

Desigur, dupa cum ne dicteaza si intuitia, aceasta forma particulara de reprezentare este echivalenta cu conceptul de realizare a unui grup ca subgrup de matrici peste un corp. Aceasta idee este detaliata in *remarca 1.3.*

Sa mai observam faptul ca orice actiune a unui grup pe o multime poate fi privita ca un caz particular de reprezentare liniara a grupului respectiv. Intradevar, fie G un grup, S o multime amorfa si

$$\varphi : G \longrightarrow Aut(S)$$

o actiune a grupului G pe multimea S. Atunci aceasta actiune poate fi privita ca o reprezentare liniara in spatiul vectorial ${}_KV :={}_K K^S$ in felul urmator:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\parallel"'] & Im(\varphi) \arrow[d, hook, "i"] \\
G \arrow[r, "T"] & Aut(V)
\end{tikzcd}$$

pentru fiecare g, aplicatia liniara $T(g)$ este definita pe baza canonica $\{e_s | s \in S\}$ prin $T(g)(e_s) := e_{\varphi_g(s)}$. Se poate proba usor ca aplicatia i care face diagrama comutativa este un morfism (de grupuri) de incluziune. Spunem in acest caz ca reprezentarea liniara astfel construita este indusa de actiunea data.

[3]Aceste rezultate pot fi gasite in aproape orice curs universitar de algebra generala precum si in multe dintre cartile dedicate teoriei grupurilor (finite). Spre exemplu, pot fi consultate in acest scop [3], [1] sau [6]

[4]si de rezultatul lui Augustin Louis Cauchy ce este continut drept caz particular de prima teorema a lui P. Sylow

Acest al doilea caz particular de reprezentare descris in remarca 1.2, restrans la situatia grupurilor finite face obiectul lucrarii de fata. Sa incepem, asadar, a discuta mai pe larg despre *reprezentari liniare de grupuri (finite)* prin intermediul catorva exemple.

Exemplul 1.1. Aplicatia $T : \mathbb{Z}_n \longrightarrow Aut(V)$, unde V este un spatiu vectorial complex (de dimensiune finita), definita prin: $[a] \longrightarrow T_a$, unde $T_a : V \to V$ este un automorfism al lui V dat de

$$T_a(v) := e^{2\pi i \frac{a}{n}} \cdot v$$

defineste o reprezentare a lui $(\mathbb{Z}_n, +)$ in V.

Exemplul 1.2. Aplicatia $T : \mathbb{R} \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2)$, definita prin: $a \longrightarrow T_a$, unde $T_a : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ este un automorfism al spatiului vectorial complex $\mathbb{C}^2$ dat de

$$T_a((u, v)) := (u,\, au + v)$$

defineste o reprezentare a lui $(\mathbb{R}, +)$ in $\mathbb{C}^2$.

Exemplul 1.3. (*reprezentarea regulata*)

Fie V un spatiu vectorial de dimensiune n peste un corp oarecare in care fixam o baza $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Fie $T : G \longrightarrow Aut(E)$ o actiune a unui grup G pe multimea E. Consideram $\widetilde{T}$ reprezentarea liniara indusa pe V data prin

$$\widetilde{T}(g)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(g) e_i$$

In cazul particular in care $E = G$, iar $T : G \longrightarrow Aut(G)$ este definita prin $g \to T_g$, $T_g(g') = gg'$, T se numeste *reprezentarea regulata (stanga) a lui G peste K*. Acest prim exemplu abstract joaca un rol fundamental in teoria reprezentarilor liniare de grupuri finite, dupa cum se va vedea in capitolele urmatore.

Avand la indemana suficiente exemple edificatoare, trecem acum la un studiu putin mai general al reprezentarilor liniare.

Remarca 1.3. (*reprezentarea matriceala*)

Vom arata in cele ce urmeaza cum poate fi vizualizata in cadrul teoriei reprezentarilor liniare de grupuri(finite) legatura care exista intre automorfismele unui spatiu vectorial n-dimensional ${}_K V$ si grupul general liniar $Gl_n(K)$ determinat de acestea. Pentru aceasta, fie V un spatiu vectorial de dimensiune n in care fixam o baza $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, fie G un grup fixat si T o reprezentare a lui G in V. Putem observa in mod natural ca matricile notate $t(g)$ (sau t_g) asociate automorfismelor $T(g)$ (notate de aici inainte fara mentiune explicita si T_g) si bazei E date prin

$$t_g = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & \ldots & t_{1n}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & \ldots & t_{nn}(g) \end{pmatrix}$$

pentru toti $g \in G$, definesc un morfism *canonic* de grupuri $t : G \longrightarrow Gl_n(K)$, dat prin $g \to t_g$, numit *reprezentarea matriceala* a lui T in baza E. Evident, reprezentarea matriceala asociata lui T se schimba o data cu schimbarea bazei E. Intuitia ne spune ca in acest caz avem de a face in mod esential cu o singura reprezentare, lucru pe care il vom formaliza si proba in detaliu (prin definitia 1.2 si remarca ce ii urmeaza) pe baza urmatoarei remarci fundamentale.

Remarca 1.4. (*structura de $K[G]$-modul indusa de o reprezentare liniara*)

Fie V un spatiu vectorial peste corpul K, G un grup si $T : G \longrightarrow Aut({}_KV)$ o reprezentare liniara a grupului G in V. Atunci reprezentarea T induce o structura *canonica* de $K[G]$-modul (stang) pe V data prin

$$g \cdot v = T(g)(v). \tag{1.1}$$

Reciproc, dat un modul V peste $K[G]$, el devine un K-spatiu vectorial prin restrictia scalarilor. In aceste conditii aplicatia $T : G \longrightarrow Aut({}_KV)$ data de $g \longrightarrow T_g$, unde $T_g :_K V \to_K V$ sunt automorfisme de spatii vectoriale definite prin

$$T_g(v) := g \cdot v$$

definesc *in mod canonic* o reprezentare a grupului G in ${}_KV$ care induce pe V exact structura de $K[G]$-modul considerata initial.

Cu alte cuvinte, orice reprezentare liniara a unui grup G intr-un spatiu vectorial ${}_KV$ induce in mod canonic o structura algebrica ${}_{K[G]}V$ de $K[G]$-modul, iar *aceasta asociere este la randul ei in mod canonic biunivoca.* Mai clar spus, a vorbi despre reprezentari liniare de grupuri este echivalent cu a vorbi despre structuri de $K[G]$-module.

In acest moment apare ca o necesitate cerinta unei mai bune intelegeri a structurii algebrice nou revelate. Pentru aceasta, sa raspundem la urmatoarele doua intrebari:

1. Cum ,,arata" submodulele unui $K[G]$-modul dat?
2. Cum ,,arata" un morfism de $K[G]$-module?

Fie, asadar, $T : G \longrightarrow Aut({}_KV)$ o reprezentare liniara a unui grup G intr-un spatiu vectorial ${}_KV$ si ${}_{K[G]V}$ $K[G]$-modulul asociat acestei reprezentari. Atunci o multime oarecare $W \subseteq V$ este $K[G]$-submodul al lui V daca si numai daca au loc simultan

$$\begin{aligned} &W + W = W; \\ &\alpha \cdot W = W \quad \forall\, \alpha \in K[G]. \end{aligned}$$

Spus in cuvinte, multimea $W \subseteq V$ este $K[G]$-submodul al lui V daca si numai daca W este un subspatiu vectorial al spatiului vectorial ${}_KV$ invariat de toate automorfismele T_g date de reprezentarea T.

Fie acum $T : G \longrightarrow Aut({}_KV)$ si $T' : G \longrightarrow Aut({}_KV')$ reprezentari liniare ale unui grup G in spatii vectoriale peste un acelasi corp K considerate impreuna cu structurile (diferite) de $K[G]$-module induse de acestea. Atunci o aplicatie oarecare $f : {}_{K[G]}V \longrightarrow {}_{K[G]}V'$ este morfism de $K[G]$-module daca si numai daca indeplineste simultan conditiile

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall\ v_1, v_2 \in V;$$
$$f(\alpha \cdot v) = \alpha f(v) \quad \forall\ \alpha \in K[G]\,,\ \forall\ v \in V.$$

Mai clar spus, cu notatiile de mai sus, morfismele de $K[G]$-module sunt exact acele aplicatii liniare de K-spatii vectoriale care indeplinesc in plus conditia

$$f \circ T_g = T'_g \circ f \text{ pentru toti } g \in G. \tag{1.2}$$

Aplicand cele de mai sus in cazul exemplului 1.1 de la pagina 5, obtinem usor ca orice $\mathbb{C}$-subspatiu vectorial al spatiului vectorial ${}_{\mathbb{C}}V$ este $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$-submodul al modulului ${}_{\mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]}V$, si orice endomorfism $\mathbb{C}$-liniar a lui ${}_{\mathbb{C}}V$ este endomorfism de module pentru ${}_{\mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]}V$.

In mod similar, in cazul exemplului 1.2 de la pagina 5 se poate vedea ca singurele $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$-submodule ale modulului ${}_{\mathbb{C}[\mathbb{R}]}\mathbb{C}^2$ sunt $0\,,\ 0 \times \mathbb{C}$ si $\mathbb{C}^2$, si ca dintre toate aplicatiile $\mathbb{C}$-liniare ale $\mathbb{C}$-spatiului vectorial ${}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2$ doar cele care sunt de forma $(v_1,\ v_2) \longrightarrow (av_1,\ bv_2 + a)$ sunt endomorfisme de $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$-module pentru modulul ${}_{\mathbb{C}[\mathbb{R}]}\mathbb{C}^2$.

Sa formalizam in finalul acestei sectiuni ideea intuitiva notata la sfarsitul remarcei 1.3 de la pagina 5.

Definitia 1.2. Fie $T : G \longrightarrow Aut({}_KV)$ si $T' : G \longrightarrow Aut({}_KV')$ reprezentari liniare ale unui grup G in spatii vectoriale peste un acelasi corp K. Spunem ca cele doua reprezentari sunt *echivalente* daca structurile de $K[G]$-module induse de acestea sunt *izomorfe*. Altfel spus, cele doua reprezentari sunt echivalente daca si numai daca exista un izomorfism liniar $f :_K V \longrightarrow_K V'$ de K-spatii vectoriale care indeplineste conditia

$$f \circ T_g \circ f^{-1} = T'_g \text{ pentru toti } g \in G. \tag{1.3}$$

Clasa de echivalenta a unei reprezentari date T se numeste *tipul reprezentarii.* Devine clar acum ca tipurile de reprezentari corespund claselor de izomorfisme asociate $K[G]$-modulelor[5].

Remarca 1.5. Transpusa in limbaj matriceal, aceasta definitie ne spune ca doua reprezentari matriceale $t,\ t' : G \longrightarrow Gl_n(K)$ ale unui aceluiasi grup G sunt *echivalente* daca exista o matrice $A \in Gl_n(K)$ astfel incat

$$A \cdot t_g \cdot A^{-1} = t'_g \text{ pentru toti } g \in G. \tag{1.4}$$

[5]pe tot parcursul lucrarii de aici inainte, cu exceptia cazurilor mentionate explicit, vom identifica in mod sistematic o reprezentare cu tipul ei

Asadar, orice doua reprezentari matriceale asociate unei reprezentari liniare date ce difera printr-o schimbare a bazei sunt echivalente. Din acest punct de vedere, cu precautia de rigoare, are sens sa vorbim despre *reprezentarea matriceala* asociata unei reprezentari liniare date.

1.3 Lema lui I. Schur si teorema lui H. Maschke

Sintetizand in cuvinte si imbogatind cele discutate in sectiunea precedenta, putem trage urmatoarele concluzii:

1. Ca urmare a unei tendinte majore de abstractizare a matematicii, la sfarsitul secolului al 18-lea se decanteaza notiunea de grup. Matematica dezvoltata ulterior arata importanta acestei notiuni si necesitatea studierii ei in mod sistematic.

2. Dintre primele incercari de investigare a grupurilor se distinge metoda studierii *ipostazelor* unui grup abstract in grupuri concret definite. Se naste astfel o intreaga *teorie a reprezentarilor de grupuri.*

3. Una din ramurile ei, anume teoria reprezentarilor liniare de grupuri finite, se ocupa cu studierea ipostazelor unui grup finit in *grupuri generale liniare.*

4. O metoda de abordare a studiului acestor ipostaze[6] se bazeaza pe observarea echivalentei algebrice dintre o reprezentare liniara si structura specifica de modul pe care o induce.

Asadar, asa cum am notat si mai sus, tot studiul reprezentarilor liniare[7] de grupuri finite ce urmeaza a fi dezvoltat pe parcursul acestei lucrari se axeaza pe investigarea structurii de modul asociate. Cercetarea efectuata in aceasta directie are drept punct de plecare urmatoarele doua definitii simple:

– In general, un modul se numeste *ireductibil* daca nu are submodule proprii.

– In general, un modul se numeste *decompozabil* daca poate fi scris ca o suma directa de submodule proprii. In caz contrar, modulul se numeste *indecompozabil.*

Dupa cum vom vedea in sectiunea de fata si cea care urmeaza, simpla adaptare a acestor notiuni in cazul general al reprezentarilor liniare de grupuri, urmata de doua rezultate imediate dar fundamentale vor fi suficiente pentru a formula si demonstra o prima serie de proprietati pentru anumite clase de reprezentari liniare.

[6] dezvoltata intr-o anumita masura in lucrarea de fata, in cazul ei cel mai simplu

[7] pe tot parcursul lucrarii inainte, cu exceptia cazurilor mentionate explicit, toate reprezentarile liniare vor fi considerate a fi de dimensiune *finita*

Definitia 1.3. Spunem despre o reprezentare liniara $T : G \longrightarrow Aut({}_K V)$ ca este *ireductibila* daca V impreuna cu structura de $K[G]$-modul indusa de aceasta este un modul ireductibil. In caz contrar, spunem ca T este o reprezentare *reductibila*. Evident, aceasta definitie se poate extinde imediat la tipuri de reprezentari liniare.

Lema 1.1. (Isaai Schur, ∼1905)

Fie $T : G \longrightarrow Aut({}_K V)$ *si* $T' : G \longrightarrow Aut({}_K V')$ *doua reprezentari liniare* ireductibile *ale unui grup* G *in spatii vectoriale peste un acelasi corp* K. *Atunci orice morfism de* $K[G]$*-module* $f : {}_{K[G]}V \longrightarrow {}_{K[G]}V'$ *este fie un* izomorfism *de* $K[G]$*-module, fie* morfismul nul[8].

Demonstraţie. Daca $Im(f)$ este modulul nul, atunci morfismul dat este morfismul nul.

In caz contrar, cum T' este ireductibila, inseamna ca $Im(f) = V'$. Mai mult, de aici avem de asemenea ca $Ker(f) \neq V$, de unde, folosind ireductibilitatea reprezentarii T, deducem ca $Ker(f) = 0$. Asadar, in acest caz, f este de fapt izomorfism de $K[G]$-module. □

Definitia 1.4. Spunem despre o reprezentare (liniara) $T : G \longrightarrow Aut({}_K V)$ ca este *decompozabila* daca V impreuna cu structura de $K[G]$-modul indusa de aceasta este un modul decompozabil. In caz contrar, spunem ca T este o reprezentare *indecompozabila*. Ca mai sus, aceasta definitie se poate extinde imediat la tipuri de reprezentari liniare.

Remarca 1.6. Sa observam ca sumarea directa de module implicata in aceasta definitie poate fi transpusa in cazul reprezentarilor liniare la sumare directa de reprezentari liniare in sensul urmator: daca $T : G \longrightarrow Aut({}_K V)$ si $T' : G \longrightarrow Aut({}_K V')$ sunt doua reprezentari liniare ale unui grup G in spatii vectoriale peste un acelasi corp K, definim suma directa a lui T cu T' ca fiind reprezentarea liniara $T \oplus T' : G \longrightarrow Aut(V \oplus V')$, $(T \oplus T')(g) := T_g \oplus T'_g$. Aceasta definitie este compatibila cu relatia de echivalenta data de tipurile unei reprezentari. Transcrierea in limbaj de matrici a acestei definitii este urmatoarea: date doua reprezentari matriceale $t : G \longrightarrow Gl_n(K)$ si $t' : G \longrightarrow Gl_{n'}(K)$, definim reprezentarea liniara $t \oplus t'$ a fi aplicatia $t \oplus t' : G \longrightarrow Gl_{n+n'}(K)$ data in baza canonica prin

$$(t \oplus t')_g = \begin{pmatrix} t_g & 0 \\ 0 & t'_g \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

pentru toti $g \in G$. Este acum usor de vazut ca o reprezentare liniara a unui grup G dat este decompozabila daca si numai daca reprezentarea matriceala asociata este echivalenta cu o reprezentare matriceala de forma

$$\begin{pmatrix} t_g & 0 \\ 0 & t'_g \end{pmatrix}$$

[8]desi acest rezultat devenit clasic a ramas in istoria matematicii cu denumirea de lema, importanta lui este fundamentala pentru dezvoltarea ulterioara a teoriei reprezentarilor

unde $(t_g)_{g\in G}$ si $(t'_g)_{g\in G}$ definesc la randul lor doua reprezentari matriceale ale grupului considerat G.

In plus, sa mai remarcam ca suma directa de (tipuri de) reprezentari liniare (sau matriceale) este comutativa, pentru ca (folosind notatiile de mai sus) are loc relatia

$$f \circ T_g \circ f^{-1} = T'_g \text{ pentru toti } g \in G,$$

unde f este automorfismul liniar al lui $Gl_{n+n'}(K)$ dat in baza canonica de matricea

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{n'} \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

(prin I_n s-a notat matricea unitate a lui $Gl_n(K)$).

Continuand sirul observatiilor, remarcam imediat ca orice reprezentare ireductibila este indecompozabila. Evident, aceeasi afirmatie este valabila si in cazul mai general al modulelor. Intrebarea cheie care se pune in legatura cu aceste doua notiuni este in ce conditii ireductibilitatea este echivalenta cu indecompozabiliatea, *in cazul particular* al reprezentarilor liniare de grupuri? Cu alte cuvinte, pentru ce clase de reprezentari liniare are loc echivalenta *reprezentare ireductibila* $\Longleftrightarrow$ *reprezentare indecompozabila*, proprietate numita de *totala decompozabilitate* (sau *semisimplicitate*)? Un raspuns la aceasta intrebare este dat de rezultatul imediat urmator alaturi de consecinta lui de mai jos.

Teorema 1.2. (Heinrich Maschke, 1899)

Fie G un grup finit si V un spatiu vectorial peste un corp K a carui caracteristica nu divide $|G|$. Atunci orice reprezentare reductibila a lui G in V este decompozabila.

Demonstraţie. Fie $T : G \longrightarrow Aut({}_KV)$ o reprezentare reductibila si fie W on $K[G]$-submodul propriu al modului ${}_{K[G]}V$ indus de T. Vrem sa aratam ca W este sumand direct in V in raport cu structura de $K[G]$-modul. Pentru aceasta sa observam ca, in raport cu structura de K-spatiu vectorial, W este sumand direct in V in mod banal. Ideea demonstratiei este de a rescrie aceasta observatie intr-un mod avantajos, care sa poata fi extins apoi la structura de $K[G]$-modul.

Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ o baza a lui ${}_KW$ extinsa la o baza $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a lui ${}_KV$. Fie $f :_K V \longrightarrow_K W$ aplicatia liniara de proiectie data pe baza E astfel:

$$f(e_l) = \begin{cases} e_l\,, & daca \;\; l \leq r \\ 0\,, & daca \;\; l > r \end{cases}$$

Atunci f este un morfism K-liniar de spatii vectoriale cu urmatoarele proprietati:

(i) $Im(f) = W$;

(ii) $f_{|W} = id_W$;

(iii) $V = Im(f) \oplus Im(id_V - f)$.

Conform ideii de mai sus, pentru a incheia demonstratia este suficient (ca pornind de la f) sa descoperim un morfism $\tilde{f} :_{K[G]} V \longrightarrow_{K[G]} W$ de $K[G]$-module care sa indeplineasca proprietatile i) – iii).

Fie, deci

$$\tilde{f} :_{K[G]} V \longrightarrow_{K[G]} W,\ \tilde{f} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} T_g \circ f \circ T_g^{-1}.$$

Se poate verifica acum fara dificultate ca functia $\tilde{f}$ definita prin procedeul de ,,mediere” de mai sus este intr-adevar un morfism de $K[G]$-module care verifica proprietatile i) – iii). □

Corolarul 1.3. (totala decompozabilitate a reprezentarilor de tip Maschke)

Orice reprezentare liniara de dimensiune finita a unui grup finit G intr-un spatiu liniar peste un corp a carui caracteristica nu divide ordinul grupului $|G|$ este o suma directa (finita) de reprezentari liniare.

Demonstraţie. Daca reprezentarea este ireductibila, atunci afirmatia este indeplinita in mod trivial. In caz ca ea este reductibila, o putem exprima ca suma directa a doua reprezentari de grade strict mai mici, conform teoremei lui H. Maschke. Rezultatul este o aplicatie imediata a inductiei dupa gradul reprezentarii. □

Remarca 1.7. Sa observam ca daca K este un corp de caracteristica 0, atunci orice reprezentare a unui grup G intr-un spatiu vectorial ${}_K V$ peste K are proprietatea de totala decompozabiliate.

Cazul particular $K = \mathbb{C}$ va face in mod exclusiv obiectul prezentarii din capitolele urmatoare.

Pentru a exemplifica interactiunile naturale ce au loc intre diferite ramuri ale matematicii, dam in urmatorul paragraf, fara demonstratii, cateva legaturi ale teoremei lui H. Maschke cu rezultate clasice din teoria modulelor si inelelor semisimple[9].

Afirmatie. (*structura inelelor $K[G]$ cand $char(K)$ nu divide G*)

Transpus in limbaj de module, corolarul 1.3 de mai sus spune ca daca G este un grup finit si K un corp a carui caracteristica nu divide $|G|$, atunci orice modul ${}_{K[G]}M$ peste $K[G]$ este *semisimplu* (adica orice submodul al lui M este sumand direct in M). Conform unui rezultat din teoria modulelor, aceasta este echivalent cu a spune ca, in particular, inelul $K[G]$ considerat in mod canonic cu structura de $K[G]$ modul (stang) este semisimplu. Folosind acum in mod direct teorema J.Wedderburn – E.Artin asupra structurii inelelor semisimple, obtinem ca inelul $K[G]$ este un produs direct finit de inele de matrici peste corpuri. In plus, mai are loc si afirmatia potrivit careia orice modul peste $K[G]$ este atat proiectiv cat si injectiv.

[9]pentru enunturi si demonstratii complete ale rezultatelor folosite in acest paragraf, se pot consulta sectiunile §7-10 continute in capitolul XI din [4]

1.4 Tipuri speciale de reprezentari liniare ireductibile

Prezentam in aceasta sectiune o aplicatie imediata a lemei lui I. Schur la grupuri abeliene, cat si alte cateva rezultate asupra unor cazuri particulare de reprezentari ireductibile.

Corolarul 1.4. *Fie V un spatiu liniar peste un corp* algebric inchis *K iar T o reprezentare ireductibila a unui grup finit G in V. Atunci orice endomorfism de $K[G]$-module a lui ${}_{K[G]}V$ este o omotetie, adica*

$$\forall\, f \in End_{K[G]}(V)\ \exists\, a \in K \ \textit{astfel incat}\ f = a \cdot id_V.$$

Demonstraţie. Fie $f : {}_{K[G]}V \longrightarrow {}_{K[G]}V$ un asemenea endomorfism. In particular, f este endomorfism de K-spatii vectoriale. Cum K este algebric inchis, f admite macar o valoare proprie. Fie a una din valorile proprii ale lui f. Atunci aplicatia $f - a \cdot id_V$ este evident un $K[G]$-endomorfism neinjectiv. Intrucat T este ireductibila, din lema lui I. Schur reiese ca in mod necesar $f - a \cdot id_V \in End_{K[G]}(V)$ este endomorfismul nul. □

Propozitia 1.5. (asupra reprezentarilor de grupuri abeliene)

Orice reprezentare ireductibila T a unui grup comutativ G intr-un spatiu vectorial peste un corp algebric inchis ${}_KV$ are gradul unu.

Demonstraţie. Fie T,G si ${}_KV$ ca in enunt si ${}_{K[G]}V$ $K[G]$-modulul indus de T. Fie $h \in G$ un element arbitrar fixat. Cum G este comutativ, pentru endomorfismul de spatii vectoriale T_h are loc

$$T_g \circ T_h \circ T_g^{-1} = T_h, \text{ pentru toti } g \in G.$$

Deci $T_h \in End_{K[G]}V$, si folosind corolarul 1.4 obtinem ca T_h este o omotetie. Dar de aici rezulta ca orice K-subspatiu vectorial W al lui V este invariat de T_h. Cum $h \in G$ a fost ales arbitrar, avem ca

$$\forall\, {}_KW \leq {}_KV \text{ si } \forall\, h \in G,\ \ T_h(W) = W.$$

Asadar orice subspatiu vectorial al lui ${}_KV$ este submodul al modulului ${}_{K[G]}V$. Cum T este ireductibila, avem in mod necesar ca ${}_KV$ nu are subspatii vectoriale proprii. □

Remarca-exercitiu. (*O conditie de diagonalizare simultana pentru multimi finite de matrici*)

Daca G este un subgrup finit comutativ al lui $Gl_n(K)$, unde K este un corp algebric inchis a carui caracteristica nu divide $|G|$, atunci G este conjugat in $Gl_n(K)$ cu un subgrup format din matrici diagonale.

Intr-adevar, incluziunea $G \hookrightarrow Gl_n(K)$ defineste o reprezentare matriceala t a lui G. Ea este, conform corolarului 1.3, o suma directa de reprezentari matriceale

ireductibile. Insa, folosind propozitia 1.5, reiese ca singurele reprezentari matriceale ireductibile ale lui G sunt de gradul intai. Prin urmare, t este echivalenta cu o reprezentare $s = s_1 \oplus s_2 \oplus \cdots \oplus s_n$ data matriceal prin

$$s_g = \begin{pmatrix} s_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n(g) \end{pmatrix}.$$

Dar echivalenta dintre t si s inseamna exact ca grupul $G = Im(t)$ este conjugat cu grupul de matrici diagonale $Im(s)$.

Sa observam acum ca enuntul de mai sus, transpus in limbaj de algebra liniara, se traduce in urmatorul rezultat: Daca $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(K)$ sunt k matrici patratice cu intrari intr-un corp algebric inchis K (spre exemplu $K = \mathbb{C}$) care comuta intre ele doua cate doua, atunci ele sunt simultan diagonalizabile (adica exista $E \in \mathcal{M}_n(K)$ inversabila astfel incat matricile $E \cdot A_i \cdot E^{-1}$ sunt simultan diagonale).

Propozitia 1.6. (asupra reprezentarilor de gradul intai)
Daca G este un grup finit (notat multiplicativ), atunci numarul reprezentarilor liniare de gradul intai peste un corp algebric inchis K pentru care $char(K)$ nu divide $|G|$ este egal cu indicele comutatorului G' in G.

Demonstraţie. Sa numaram morfismele de grupuri multiplicative $T : G \longrightarrow K^*$. Nu este greu de remarcat ca orice morfism $T : G \longrightarrow K^*$ induce in mod canonic un morfism $\widetilde{T} : G/G' \longrightarrow K^*$ (dat de $\widetilde{T}([g]) = T(g), \forall\, g \in G$), iar aceasta asociere este bijectiva. Asadar ne putem restrange la a numara morfismele multiplicative ale grupului abelian G/G' in K^*.

Putem scrie grupul abelian finit G/G' ca un produs finit de grupuri ciclice (nu neaparat distincte) $G/G' = \prod_{i=1}^{n} C_i$, pentru un anumit n. De aici avem usor ca $|Hom(G/G',\, K^*)| = |\prod_{i=1}^{n} Hom(C_i,\, K^*)|$. Cum grupurile C_i sunt ciclice, numarul de morfisme multiplicative de la C_i la K^* este dat de numarul de radacini de ordinul $|C_i|$ ale unitatii din K. Dar in cazul de fata corpul K este algebric inchis si caracteristica lui nu divide $|G|$, de unde rezulta ca pentru fiecare $|C_i|$ sunt exact $|C_i|$ radacini distincte ale unitatii in K. □

In incheierea acestei sectiuni prezentam prin intermediul propozitiei 1.8 de mai jos un rezultat care sugereaza ca teorema lui H. Maschke nu este adevarata intotdeauna daca se elimina din enunt conditia $|G|$ *nu divide* $char(K)$. Pentru aceasta vom proba mai intai un rezultat ajutator, cu ajutorul notatiei ce urmeaza.

Notatie. In legatura cu o reprezentare liniara $T : G \longrightarrow Gl_n(K)$, notam cu $Fix_G(V) := \{x \in V \mid T_g(v) = v, \forall g \in G\}$. Evident, atunci cand $Fix_G(V) \neq \emptyset$, $Fix_G(V)$ este un $K[G]$-submodul al lui ${}_{K[G]}V$.

Lema 1.7. *Fie p un numar prim, G un p-grup si $T : G \longrightarrow Gl_n(K)$ este o reprezentare a sa peste un corp (nu neaparat algebric inchis) K de caracteristica p. Atunci $Fix_G(V) \neq \emptyset$. In plus, daca T este ireductibila, $Im(T)$ nu are p-subgrupuri normale nebanale.*

Demonstraţie. Demonstram rezultatul enuntat in prima parte a lemei prin inductie dupa exponentul notat cu n al lui p din $|G|$.

Pentru $n = 0$ afirmatia e triviala.

Sa presupunem ca ea este adevarata pentru toate p-grupurile de ordin strict mai mic decat p^n. Fie G un p-grup cu p^n elemente si T ca in enunt.

Din prima teorema a lui P. Sylow, G are un subgrup H cu p^{n-1} elemente. Cum $[G : H] = p$ iar p este cel mai mic numar prim care divide ordinul grupului G deducem ca H este normal in G. Folosind ipoteza de inductie, avem ca $W := Fix_H(V) \neq \emptyset$ si W este un $K[H]$-submodul al lui V (ca modul indus de $T_{|H}$).

Mai mult, W este chiar $K[G]$-submodul al lui V. Intr-adevar, folosind structura de $K[H]$-modul[10], $W = \{v \in V \mid h \cdot v = v\,,\ \forall\, h \in H\}$. Fie acum $g \in G$ ales arbitrar. Cum H este normal in G, pentru orice $v \in W$ are loc

$$h \cdot (gv) = g \cdot (g^{-1}hg) \cdot v = gv,\ \forall\, h \in H.$$

In particular, daca fixam in mod arbitrar un $g \in G \setminus H$, aplicatia liniara $f : W \longrightarrow W$, $f = T(g)_{|W}$ este bine definita. Cum $g^p \in H$ si $W = Fix_H(V)$, rezulta ca $f^p = id_W$. Folosindu-ne si de ipoteza ca $char(K) = p$, obtinem imediat ca f verifica polinomul $X^p - 1 = (X - 1)^p \in K[X]$.

Asadar f admite pe 1 drept valoare proprie, ceea ce este acelasi lucru cu a afirma ca

$$\exists\, v_0 \in W = Fix_H(V) \text{ astfel incat } g \cdot v_0 = v_0.$$

Dar $H \cdot v_0 = v_0$ si H a fost ales a fi subgrup maximal al lui G, de unde obtinem ca $G \cdot v_0 =< g, H > \cdot v_0 = v_0$. Cu alte cuvinte, $v_0 \in Fix_G(V)$.

Pentru demonstrarea partii a doua a lemei, sa presupunem ca T este o reprezentare liniara ireductibila a lui G. Fie H un p-subgrup normal in $Im(T)$. Sa consideram reprezentarea liniara β data de compunerea $H \hookrightarrow Im(T) \hookrightarrow Aut(_K V)$. Din prima parte a lemei obtinem imediat ca $W := Fix_H(V) \neq \emptyset$, deci ca W este un $K[H]$-submodul al modulului $_{K[H]}V$ dat de reprezentarea β. Cu un argument perfect similar cu cel folosit trei paragrafe mai sus, din faptul ca H este subgrup normal in $Im(T)$, deducem ca W este chiar $K[Im(T)]$-submodul al modulului $_{K[Im(T)]}V$ dat de reprezentarea $\alpha : Im(T) \hookrightarrow Aut(_K V)$.

Dar cum T este ireductibila, inseamna ca si α este ireductibila, deci $W = V$. Asadar, pe de o parte $Im(\beta) = \{id_V\}$, iar pe de alta parte reprezentarea β este data printr-o incluziune canonica. Urmeaza in mod necesar ca H este p-subgrupul trivial al lui $Im(T)$. $\square$

[10] in notatie multiplicativa (vezi remarca 1.4 de la pagina 6)

Propozitia 1.8. (reprezentarile ireductibile ale p-grupurilor in cazul corpurilor de caracteristica p)

Fie G un p-grup, K un corp de caracteristica p (nu neaparat algebric inchis) si $T : G \longrightarrow Aut(_K V)$ o reprezentare ireductibila a lui G intr-un spatiu vectorial finit dimensional $_K V$. Atunci T este reprezentarea triviala ($T_g = id_V, \forall\, g \in G$).

Demonstraţie. Teorema fundamentala de izomorfism ne da $Im(T) \simeq G/Ker(T)$, de unde gasim ca $Im(T)$ este un p-grup. Folosindu-ne acum esential de lema mai inainte demonstrata, avem ca $Im(T)$ este un p-grup fara subgrupuri normale, deci $Im(T) = \{id_V\}$. $\square$

Capitolul 2

Caractere de reprezentari liniare complexe

2.1 Definitie si proprietati elementare

In conformitate cu cele expuse in capitolul precedent, devine acum evident ca a studia reprezentarile liniare ale unui grup ce indeplinesc conditiile din teorema lui H. Maschke este acelasi lucru cu a studia reprezentarile ireductibile ale acelui grup. Asa cum am notat si in remarca 1.7, cazul particular al reprezentarilor liniare complexe (finit dimensionale) de grupuri finite intra in aceasta categorie. Asadar, vom fi direct interesati in acest capitol de gasi si prezenta modalitati de investigare a reprezentarilor ireductibile ale unui grup finit peste spatii vectoriale *complexe* finit dimensionale.

Pentru aceasta sa observam ca, in general, a studia o reprezentare liniara $T : G \longrightarrow Aut(_K V)$ a unui grup G intr-un spatiu vectorial de dimensiune finita n este acelasi lucru cu a studia o familie de automorfisme liniare $(T_g)_{g \in G}$ ce formeaza un grup in raport cu compunerea (sau a studia o familie de matrici $(t_g)_{g \in G}$ din $Gl_n(K)$ ce formeaza un grup in raport cu inmultirea). Amintim din algebra liniara ca *valorile proprii*, *polinomul caracteristic*, *polinomul minimal*, precum si *determinantul* si *urma* unei aplicatii liniare (matrici) sunt notiuni clasice asociate acesteia. Asadar toate aceste notiuni pot servi intr-o prima faza drept potentiale instrumente de studiu al reprezentarilor liniare. Insa, daca a cunoaste o reprezentare liniara inseamna a cunoaste o famile de automorfisme liniare, iar – potrivit algebrei liniare – a cunoaste un morfism liniar inseama a cunoaste valorile sale proprii, devine clar ca dintre toate cele listate mai sus, *valorile proprii* reprezinta un instrument foarte indicat de ales. Mai mult chiar, sa observam ca, folosindu-ne de structura de grup a familiei $(T_g)_{g \in G}$, a cunoaste un automorfism T_g implica in mod automat a cunoaste toate puterile sale intregi $(T_g)^k = T_{g^k}$. Daca notam cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valorile sale proprii (intr-o inchidere algebrica), putem acum rationa ca a sti T_g este acelasi lucru cu a sti $(T_g)^k$ pentru toti $k \in \mathbb{Z}$ adica acelasi

lucru cu a sti $(\lambda_i^k)_{i=\overline{1,n}}$ pentru toate puterile intregi k. Dar acum, un exercitiu de combinatorica elementara ne spune ca valorile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se pot afla daca se cunosc sumele $S_k := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k \ \Big(= Tr(T_{g^k})\Big)$ pentru toate puterile intregi k. Concluzionand acum cele discutate, notam ca a cunoaste o reprezentare liniara $T : G \longrightarrow Aut({}_K V)$ a unui grup G intr-un spatiu vectorial de dimensiune finita inseamna a cunoaste familia $(Tr(T_g))_{g\in G}$ de valori din corpul K.

Sa fructificam acum cele observate mai sus prin definitia si obseratiile urmatoare.

Definitia 2.1. Fie $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ o reprezentare liniara a unui grup finit G peste un spatiu vectorial complex de dimensiune finita n. Numim *caracterul* (*complex* al) reprezentarii T si notam cu χ aplicatia $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ data prin

$$\chi(g) = Tr(T_g) \text{ pentru toti } g \in G.$$

Pentru uniformitate, vom nota de aici inainte de cate ori va fi posibil cu $\chi_g := \chi(g)$ valorile aplicatiei χ.

Exemplul 2.1. (*caracterul reprezentarii regulate*)

Fie G un grup finit, $V = \Big\{ \sum\limits_{g\in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{C}, \text{ pentru toti } g \in G \Big\}$ spatiul vectorial complex al combinatiilor liniare formale de elemente din G cu coeficienti complecsi iar $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ *reprezentarea regulata* (*stanga*)[1] data prin

$$T_g\big(\sum_{h\in G} a_h \cdot h\big) = \sum_{h\in G} a_h \cdot gh. \tag{2.1}$$

Nu este greu de observat ca reprezentarea matriceala t asociata bazei canonice $(1 \cdot g)_{g\in G}$ este data de matrici ce au pe fiecare linie si pe fiecare coloana cate un singur element nenul (egal, de fapt cu 1). Mai mult, daca una dintre matricile t_g admite un 1 pe diagonala, atunci ea este matricea unitate, si in acest caz $g = e$, elementul neutru al grupului. Asadar, daca notam cu χ_{reg} caracterul asociat acestei reprezentari, atunci are loc

$$\chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G|\,, & daca \ \ g = e, \\ 0\,, & altfel. \end{cases}$$

Remarca 2.1. (*proprietati elementare ale caracterelor*)

Sa observam in primul rand ca, intrucat valorile proprii ale unui endomorfism liniar de spatii vectoriale complexe finit dimensionale sunt invariante la conjugari, definitia de mai sus se poate extine la tipuri de reprezentari. Cu notatiile din

[1] vezi si exemplul 1.3 de la pagina 5

definita anterioara, este imediat de observat ca χ are urmatoarele proprietati:

(1) $\chi_e = n$ (am notat cu e elementul neutru al grupului G);

(2) $\chi_{gg'} = \chi_{g'g}$ pentru toti $g, g' \in G$;

(3) $\chi_{gg'g^{-1}} = \chi_{g'}$ pentru toti $g, g' \in G$.

Intr-adevar, $\chi_e = Tr(T_e) = Tr(id_V) = n$. Proprietatea (iii) este o consecinta a rezultatului de algebra liniara mentionat la inceputul acestei remarci. Pentru (ii), fie in general doua matrici $A = (a_{ij})$ si $B = (b_{ij})$. Atunci au loc egalitatile $Tr(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} \right) = Tr(BA)$.

Se poate insa spune mai mult despre caracterele reprezentarilor liniare complexe ale unui grup finit G plecand de la structura concreta a corpului numerelor complexe.

Intr-adevar, pentru orice $g \in G$, χ_g este o suma de n radacini ale unitatii de acelasi ordin cu ordinul elementului $g \in G$ notat $ord(g)$ – intrucat $(T_g)^{ord(g)} = id_V$ atrage dupa sine faptul ca valorile proprii ale lui T_g sunt radacini de ordinul $ord(g)$ ale unitatii. De aici rezulta usor ca are loc inegalitatea $|\chi_g| \leq n$ cu egalitate daca si numai daca toate valorile proprii ale lui T_g sunt egale intre ele. In plus, $\chi_g = n$ daca si numai daca toate valorile proprii ale lui T_g sunt chiar egale cu 1, adica daca si numai daca $T_g = id_V$. Sa enumeram asadar proprietatile obtinute.

Pentru oricare $g \in G$ au loc:

(4) χ_g este o suma de n radacini de ordinul $ord(g)$ ale unitatii;

(5) $|\chi_g| \leq n$ cu egalitate daca si numai daca spectrul lui T_g are un singur element;

(6) $\chi_g = n$ daca si numai daca $g \in Ker(T)$.

Fie acum $g \in G$ fixat. Daca notam cu $(\lambda_i)_{i=\overline{1,n}}$ valorile proprii ale lui T_g, atunci $(\lambda_i^{-1})_{i=\overline{1,n}}$ sunt valorile proprii ale lui $T_{g^{-1}}$. Mai mult, cum $|\lambda_i| = 1, \forall\, i \in \overline{1,n}$, avem ca valorile proprii ale lui $T_{g^{-1}}$ pot fi scrise ca $(\overline{\lambda_i})_{i=\overline{1,n}}$. Asadar are loc

(7) $\chi_{g^{-1}} = \overline{\chi_g}$ pentru toti $g \in G$.

Sa mai observam la finalul acestui set de remarci ca daca $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ si $T' : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V')$ sunt doua reprezentari liniare ale grupului finit G, $T \oplus T'$ este suma lor directa iar χ_T, $\chi_{T'}$ si $\chi_{T \oplus T'}$ sunt caracterele lor asociate, atunci

(8) $\chi_{T \oplus T'} = \chi_T + \chi_{T'}$.

2.2 Ortonormalitatea caracterelor ireductibile

Proprietatile enumerate in sectiunea precedenta sunt elementare si imediate. Pentru a obtine rezultate mai adanci despre caractere, avem nevoie de urmatoarul rezultat ajutator inspirat de lema lui I. Schur si de argumentul de ,,mediere" folosit la demonstrarea teoremei lui H. Maschke.

Lema 2.1. (relatiile lui Isaai Schur)

Fie $t : G \longrightarrow Gl_m(\mathbb{C})$ si $s : G \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$ doua reprezentari matriceale complexe ireductibile si neechivalente ale unui grup finit G date de matricile $t(g) = \big(t_{ij}(g)\big)$, $\forall\, g \in G$, respectiv $s(g) = \big(s_{ij}(g)\big)$, $\forall\, g \in G$. Atunci au loc:

(i) $\sum_{g\in G} t_{ij}(g)s_{rk}(g^{-1}) = 0$ *pentru toti i, j, r, k;*

(ii) $m \sum_{g\in G} t_{ij}(g)t_{rk}(g^{-1}) = |G|\delta_{ik}\delta_{jr}$.

Demonstrație. Fie $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice oarecare si fie $A = \sum_{g\in G} t(g)\cdot X \cdot s(g^{-1})$. Atunci A verifica egalitatea $t(h) \cdot A \cdot s(h^{-1}) = A$ pentru toti $h \in G$. Din lema lui I. Schur obtinem ca $A = 0_{m,n}$. Cum X a fost aleasa arbitrar, pentru X o matrice care are un singur element nenul pe pozitia (j, r) obtinem identitatea (i).

Fie acum $Y \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ o matrice oarecare si $B = \sum_{g\in G} t(g) \cdot Y \cdot t(g^{-1})$. Ca mai sus, B verifica egalitatea $t(h) \cdot B \cdot t(h^{-1}) = B$ pentru toti $h \in G$ si aplicand corolarul 1.4 de la pagina 12, obtinem ca $B = a \cdot I_m$, pentru un $a \in \mathbb{C}$. Luand acum drept $Y = (y_{ij})$ matricea definita prin $y_{ik} = \delta_{ij}\delta_{rk}$ obtinem identitatea

$$\sum_{g\in G} t_{ij}(g) \cdot t_{rk}(g^{-1}) = a\delta_{ik}. \tag{2.2}$$

Insa $a \cdot m = Tr(B) = Tr\Big(\sum_{g\in G} t(g) \cdot Y \cdot t(g^{-1})\Big) = \sum_{g\in G} Tr(Y) = |G|\delta_{jr}$. Din aceste doua relatii rezulta acum usor (ii). □

Sa scriem acum identitatea (ii) din lema de mai sus pentru $i = j$ si $r = k$:

$$m \sum_{g\in G} t_{ii}(g)t_{kk}(g^{-1}) = |G|\delta_{ik}.$$

De unde prin sumare dupa i si k obtinem $m \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{g\in G} t_{ii}(g)t_{kk}(g^{-1}) = \sum_{i,k=1}^{m} |G|\delta_{ik}$ sau echivalent $\sum_{g\in G} \sum_{i,k=1}^{m} t_{ii}(g)t_{kk}(g^{-1}) = |G|$. Rescriind, folosindu-ne de definitia unui caracter si de proprietatea elementara (7) avem

$$\sum_{g\in G} \chi_g \overline{\chi_g} = |G|, \tag{2.3}$$

unde prin χ s-a notat caracterul lui t. In mod analog, folosind identitatea (i) din lema de mai sus, obtinem

$$\sum_{g\in G} \chi_g \overline{\chi'_g} = 0, \tag{2.4}$$

unde prin χ' s-a notat caracterul lui s.

Relatiile 2.3 si 2.4 pe care tocmai le-am obtinut[2], in forma in care sunt scrise, duc cu gandul la posibilitatea existentei unui *produs scalar hermitian* pe un anumit spatiu vectorial complex care contine toate caracterele (asociate reprezentarilor liniare) ireductibile ale unui grup finit G considerat spre studiu si fata de care aceste caractere formeaza o *baza ortonormata*. Intorcandu-ne la proprietatea elementara (2) a caracterelor, observam ca orice caracter poate fi privit ca o aplicatie complexa definita pe clasele de conjugare ale unui grup dat.

Definitia – propozitie 2.1. Notam cu $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ multimea functiilor complexe definite pe grupul G care sunt constante pe fiecare dintre clasele de conjugare ale lui G. Multimea $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ astfel definita contine in particular *toate* caracterele asociate tuturor reprezentarilor liniare complexe si finit dimensionale ale grupului G si formeaza un *spatiu vectorial complex* in raport cu operatiile uzuale de inmultire a functiilor si inmultire cu scalari complecsi.

Aplicatia $\langle\,,\rangle : \mathcal{F}(G, \mathbb{C}) \times \mathcal{F}(G, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definita prin

$$(f, h) \longrightarrow \langle f, h\rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} f(g)h(g^{-1}) \tag{2.5}$$

se probeaza usor a fi o forma *biliniara simetrica* pe spatiul vectorial ${}_{\mathbb{C}}\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$.

Asadar aplicatia $\langle\,,\rangle$ nu reprezinta un produs scalar hermitian, intrucat este simetrica si nu putem spune intotdeauna ca este pozitiv definita. Cu toate acestea, proprietatea de ortonormalitate banuita in paragraful premergator acestei definitii se pastreaza. Sa probam in continuare acest rezultat.

Propozitia 2.2. (relatiile de ortonormalitate a caracterelor ireductibile)

Caracterele distincte asociate tipurilor de reprezentari liniare complexe ireductibile ale unui grup finit G formeaza un sistem liniar independent ortonormat peste $\mathbb{C}$. Mai mult, ele sunt in numar finit, numarul lor este acelasi cu numarul tipurilor de reprezentari liniare complexe ireductibile ale grupului finit G si acesta nu depaseste numarul claselor de conjugare ale lui G.

Demonstrație. Faptul ca definitia unui caracter se poate extinde la tipuri de reprezentari impreuna cu relatiile 2.3 si 2.4 ne asigura ca pentru grupul G sunt tot atatea caractere distincte cate tipuri de reprezentari ireductibile.

[2] aceste relatii au fost descoperite si publicate pentru prima oara de matematicianul german Ferdinand Georg Frobenius in anul 1896

Fie $\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(r)}$ o multime finita de caractere ireductibile distincte ale lui G si $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ r numere complexe arbitrar fixate cu proprietatea ca $\sum_{i=1}^{r} a_i \chi^{(i)} = 0$. Atunci $a_j = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle = \langle 0, \chi^{(j)} \rangle = 0$ pentru orice $j \in \overline{1,r}$.

Fie acum $(C_i)_{i\in\overline{1,s}}$ clasele de conjugare ale lui G. Aplicatiile $f_i \in \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ definite prin formeaza in mod evident o baza in spatiul vectorial complex $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$,

$$f_i(g) = \begin{cases} 1, & daca \;\; g \in C_i \\ 0, & altfel \end{cases} \qquad \text{pentru orice } g \in G$$

ceea ce – tinand cont si de cele demonstrate mai sus – probeaza ultima parte a enuntului propozitiei. □

Asadar la capatul acestei propozitii am aflat ca orice grup finit G admite numai un numar finit de (tipuri de) reprezentari liniare complexe ireductibile, numarul acestora nedepasind numarul claselor de conjugare ale lui G.

Sa aplicam acest rezultat, combinat cu proprietatea de totala decompozabilitate notata in remarca 1.7 de la pagina 11 mai intai unei reprezentari oarecare si apoi reprezentarii regulate.

Remarca 2.2. (*Un criteriu de ireductibilitate a reprezentarilor liniare*)

Fie G un grup finit si $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ o reprezentare liniara complexa oarecare a sa de caracter χ. Notam cu $(T_i)_{i\in\overline{1,r}}$ reprezentarile liniare complexe ireductibile ale lui G si $(\chi^{(i)})_{i\in\overline{1,r}}$ caracterele asociate acestora. Atunci exista numerele naturale $(m_i)_{i\in\overline{1,r}}$ astfel incat T sa se scrie ca[3]

$$T = m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \cdots \oplus m_r T_r.$$

Dar atunci $\langle \chi, \chi \rangle = \langle \sum_{i=1}^{r} m_i \chi^{(i)}, \sum_{j=1}^{r} m_j \chi^{(j)} \rangle = \sum_{i=1}^{r} m_i^2 \geq 1$, cu egalitate daca si numai daca $r = 1$ si $m_1 = 1$, adica daca si numai daca T este ireductibila.

Remarca 2.3. (*o relatie numerica pentru dimensiunile tuturor reprezentarilor liniare ireductibile ale unui grup finit*)

Fie G un grup finit, $(T_i)_{i\in\overline{1,r}}$ reprezentarile liniare complexe ireductibile ale lui G si $(\chi^{(i)})_{i\in\overline{1,r}}$ caracterele asociate acestora. Sa notam cu T_{reg} reprezentarea regulata (stanga) a lui G si cu χ_{reg} caracterul acesteia. Ca mai sus, exista numerele naturale $(m_i)_{i\in\overline{1,r}}$ astfel incat T_{reg} sa se scrie ca

$$T_{reg} = m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \cdots \oplus m_r T_r.$$

Mai mult, folosindu-ne de proprietatile caracterelor discutate pana acum si de formula caracterului regulat notata in exemplul 2.1, avem ca pentru toti $j \in \overline{1,r}$

[3] evident, aceasta scriere are loc in clasa *tipurilor* de reprezentari

are loc $m_j = \langle\sum_{i=1}^{r} m_i\chi^{(i)}, \chi^{(j)}\rangle = \langle\chi_{reg}, \chi^{(j)}\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{reg}(g)\overline{\chi^{(j)}(g)} = \chi^{(j)}(e)$. Deci ordinele de multiplicitate m_i ale reprezentarilor liniare ireductibile din descompunerea reprezentarii regulate T_{reg} sunt chiar dimensiunile acestora, pe care le notam cu $(d_i)_{i\in\overline{1,r}}$.

In plus, daca aplicam inca o data formula caracterului regulat, obtinem ca

$$\Big(\sum_{g\in G} d_i\chi^{(i)}\Big)(g) = \begin{cases} |G|\,, & daca\ \ g = e \\ 0\,, & altfel \end{cases}$$

ceea ce in cazul $g = e$ ne da

$$\sum_{i=1}^{r} d_i^2 = |G|. \tag{2.6}$$

Remarca-exercitiu. (*O conditie ca un grup finit sa fie abelian*)

Un grup finit G este abelian daca si numai daca toate reprezentarile liniare complexe si ireductibile ale sale sunt de gradul intai.

Intr-adevar, una din implicatiile afirmatiei de mai sus a fost deja demonstrata in propozitia 1.5. Reciproc, fie r numarul reprezentarilor grupului dat. Atunci $r \leq s$ si $\sum_{i=1}^{r} 1^2 = |G|$, unde prin s am notat numarul claselor de conjugare ale grupului G. Din cele doua rezulta ca $r = s = |G|$, adica grupul G are tot atatea clase de conjugare cat numarul sau de elemente. Evident, acest lucru se intampla daca si numai daca G este abelian.

Formulele de ortonormalitate 2.3 si 2.4 ne-au dat drept consecinta directa independenta $\mathbb{C}$-liniara a caracterelor reprezentarilor ireductibile. Foarte folositor ar fi ca multimea acestor caractere sa formeze chiar baza in ${}_{\mathbb{C}}\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$. Acest fapt ne-ar da ca pentru orice grup finit G exista tot atatea (tipuri de) reprezentari liniare complexe ireductibile cate clase de conjugare are grupul, iar suma patratelor dimensiunilor lor este egala cu ordinul grupului. Din fericire acest lucru are loc! Pentru a demonstra aceasta vom proba mai intai existenta unei a doua relatii de tip ortonormal ce are loc pe multimea finita a caracterelor complexe ireductibile asociate unui grup finit.

Propozitia 2.3. (formulele de ortogonalitate a caracterelor ireductibile)

Fie G un grup finit, $(C_i)_{i\in\overline{1,s}}$ clasele de conjugare ale lui G iar $(\chi^{(i)})_{i\in\overline{1,r}}$ multimea caracterelor complexe ireductibile ale lui G. Atunci oricum am alege $g, g' \in G$ are loc

$$\sum_{i=1}^{r}\chi_g^{(i)}\cdot\overline{\chi_{g'}^{(i)}} = \begin{cases} |G|/|C_j|\,, & daca\ \ g, g' \in C_j\ ; \\ 0\,, & daca\ \ g\ \ si\ \ g'\ \ nu\ \ sunt\ \ conjugate. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $(T_i)_{i\in\overline{1,r}}$ reprezentarile liniare complexe ireductibile ale lui G ale carui caractere sunt exact $(\chi^{(i)})_{i\in\overline{1,r}}$.

Notam cu A_{ij} pentru toti i si j pentru care au sens urmatoarele aplicatii liniare: $A_{ij} = \sum\limits_{g\in C_j} T_i(g)$. Evident, pentru orice $h \in G$ are loc:

$A_{ij} \circ T_i(h) = \sum\limits_{g\in C_j} T_i(gh) = \sum\limits_{g'\in C_j h} T_i(g') = \sum\limits_{g'\in hC_j} T_i(g') = \sum\limits_{g\in C_j} T_i(hg) = T_i(h) \circ A_{ij}$, ceea ce, avand in vedere corolarul 1.4, ne da ca aplicatiile A_{ij} sunt de forma $A_{ij} = a_{ij} \cdot id_{V_i}$, unde $(V_i)_{i\in\overline{1,r}}$ sunt spatiile vectoriale complexe de dimensiuni $(d_i)_{i\in\overline{1,r}}$ asociate reprezentarilor $(T_i)_{i\in\overline{1,r}}$.

Asadar, $a_{ij}d_i = Tr(A_{ij}) = \sum\limits_{g\in C_j} \chi_g^{(i)} = |C_j|\, \chi^{(i)}(C_j)$, unde, prin abuz de notatie, am notat cu $\chi^{(i)}(C_j)$ acea valoare luata de caracterul $\chi^{(i)}$ pe elementele clasei de conjugare C_j. De aici, prin rescriere avem ca urmatoarea identitate are loc pentru aplicatiile A_{ij} :

$$A_{ij} = \frac{|C_j|}{d_i}\chi^{(i)}(C_j) \cdot id_{V_i}. \tag{2.7}$$

Daca notam cu h_{ijk} coeficientii ce dau tabla de multiplicare formala a claselor de conjugare[4] ale lui G, avem ca $A_{ij}A_{il} = \sum\limits_{k=1}^{s} h_{jlk}A_{ik}$ pentru toti i, j si l pentru care formulele de mai sus au sens. Rescriind aceasta egalitate cu ajutorul formulei 2.7 si sumand rezultatul astfel obtinut in raport cu indicele i obtinem: $|C_j|\,|C_l| \sum\limits_{i=1}^{r} \chi^{(i)}(C_j)\chi^{(i)}(C_l) = \sum\limits_{k,i} h_{jlk}(d_i\,|C_k|\,\chi^{(i)}(C_k)) = h_{jl1}|G|$, unde ultima egalitate am obtinut-o tinand seama de formula caracterului regulat. Aplicand la aceasta ultima relatie faptul ca $h_{jl1} \neq 0$ daca si numai daca $C_j^{-1} = C_l$, caz in care $h_{jl1} = |C_j| = |C_l|$ si tinand seama de proprietatea elementara (7) a caracterelor, obtinem rezultatul dorit. $\square$

Dam in finalul acestei sectiuni rezultatul deja anuntat naintea prezentarii formulelor de ortogonalitate, sub forma teoremei care urmeaza.

Teorema 2.4. (Teorema fundamentala a reprezentarilor liniare)

Numarul (tipurilor de) reprezentari liniare complexe ireductibile finit dimensionale ale unui grup finit G coincide cu numarul claselor de conjugare ale grupului G.

Demonstrație. Sa notam cu, $(C_i)_{i\in\overline{1,s}}$ clasele de conjugare ale lui G iar $(\chi^{(i)})_{i\in\overline{1,r}}$ multimea caracterelor complexe ireductibile ale lui G. Stim ca are loc $r \leq s$. Vom proba pe baza formulelor de ortogonalitate inegalitatea inversa. Pentru aceasta, sa consideram vectorii

$$z_j = (\chi^{(1)}(C_j)\,, \chi^{(2)}(C_j)\,, \ldots,\, \chi^{(r)}(C_j)) \in \mathbb{C}^{\,r}, \text{ pentru toti } j \in \overline{1,s}.$$

[4]pentru detalii asupra acestei notiuni se pot consulta paginile 101-102 si 197 din [1] sau paginile 121-122 din [6]

Vom arata ca acestia formeaza un sistem $\mathbb{C}$-liniar independent. Fie, asadar, scalarii complecsi $(a_j)_{j\in\overline{1,s}}$ arbitrar alesi cu proprietatea ca $\sum\limits_{j=1}^{s} a_j z_j = 0$, adica

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \chi^{(i)}(C_j) = 0 \text{ pentru toti } i \in \overline{1,r}.$$

Pentru fiecare $l \in \overline{1,s}$ prin inmultirea fiecareia dintre aceste egalitati cu $\overline{\chi^{(i)}(C_l)}$ urmata de sumarea rezultatelor obtinute dupa i gasim, cu ajutorul formulelor de ortogonalitate, ca

$$0 = \sum_{j=1}^{s} a_j \sum_{i=1}^{r} \chi^{(i)}(C_j)\overline{\chi^{(i)}(C_l)} = \sum_{j=1}^{s} a_j(|G|/|C_j|)\delta_{jl} = a_l|G|/|C_l|,$$

ceea ce incheie demonstratia. □

2.3 Proprietati aritmetice ale caracterelor

Scopul acestei sectiuni este de a prezenta cateva proprietati aritmetice legate de caracterele reprezentarilor liniare ireductibile. Prima dintre ele, dupa cum se va vedea in lema si propozitia care urmeaza, este inspirata de constructia aplicatiilor liniare A_{ij} folosite la demonstrarea formulelor de ortogonalitate, constructie care la randul ei este inspirata in mod direct de argumentul de ,,mediere" folosit in demonstrarea proprietatii de totala decompozabilitate a reprezentarilor liniare ce indeplinesc conditiile lui H. Maschke.

Lema 2.5. *Fie G un grup finit, $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ o reprezentare liniara ireductibila a sa de caracter χ si C o clasa de conjugare a lui G. Atunci numerele complexe $(\chi_g)_{g\in G}$ si $(\chi_e)^{-1}|C|\chi(C)$ sunt intregi algebrici, unde prin e am notat elementul neutru al grupului.*

Demonstraţie. In acord cu proprietatea elementara (4) a caracterelor, numerele complexe $(\chi_g)_{g\in G}$ sunt sume de radacini ale unitatii, deci intregi algebrici.

Asa cum am observat si pe parcursul demonstratiei formulelor de ortogonalitate (date de propozitia 2.3), aplicatia $\sum\limits_{g\in C} T_g$ este o omotetie de rang un anumit numar complex notat aici cu z. In particular, $z\chi_e = Tr(\sum\limits_{g\in C} T_g) = |C|\chi(C)$.

Pe de alta parte, scrisa in raport cu structura multiplictiva de $\mathbb{C}[G]$-modul a lui V, omotetia mai sus mentionata se traduce prin: $\theta \cdot v = z \cdot v$ pentru toti $v \in V$, unde prin θ s-a notat elementul $\theta := \sum\limits_{g\in C} 1 \cdot g \in \mathbb{C}[G]$. Insa inelul combinatiilor formale intregi $\mathbb{Z}[G]$ generat de elementele lui G este un $\mathbb{Z}$-modul liber de baza G. Asadar, daca notam cu n numarul elementelor grupului G, avem ca multimea $(\theta^k)_{k\in\overline{0,n}}$ este $\mathbb{Z}$-liniar dependenta, adica exista $(a_k)_{k\in\overline{0,n}}$ numere intregi nu toate nule astfel incat $\sum\limits_{i=0}^{n} a_k\theta^k = 0$ in $\mathbb{Z}[G]$.

Dar acum, fie $v \in V$ nenul arbitrar fixat. Avem ca $\Big(\sum\limits_{i=0}^{n} a_k\theta^k\Big)v = \Big(\sum\limits_{i=0}^{n} a_k z^k\Big)v$, deci $\sum\limits_{i=0}^{n} a_k z^k = 0$, adica z este intreg algebric. $\square$

Rostul rezultatului abia prezentat este de a ajuta la demonstrarea unei conditii aritmetice pe care trebuie sa o indeplineasca orice dimensiune a unei reprezentari liniare ireductibile a unui grup finit. Dam in continuare enuntul exact si demonstratia acestei conditii.

Propozitia 2.6. (O conditie aritmetica pentru dimensiunea unei reprezentari liniare ireductibile – varianta slaba, F.G. FROBENIUS, 1896)

Gradul unei reprezentari liniare ireductibile $T : G \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}V)$ a unui grup finit G divide ordinul grupului.

Demonstraţie. Sa notam cu e elementul neutru al grupului, cu χ caracterul reprezentarii T si cu $(C_i)_{i\in\overline{1,s}}$ clasele de conjugare ale lui G. Relatia de ortonormalitate a caracterelor ireductibile 2.3 ne da ca $|G| = \sum\limits_{g\in G} \chi_g\overline{\chi_g} = \sum\limits_{i=1}^{s} |C_i|\chi(C_i)\overline{\chi(C_i)}$, de unde:

$$(\chi_e)^{-1}|G| = \sum_{i=1}^{s} \Big((\chi_e)^{-1}|C_i|\chi(C_i)\Big)\overline{\chi(C_i)}.$$

Dar tinand seama de lema pecedenta si de faptul ca un numar complex este intreg algebric daca si numai daca conjugatul sau este intreg algebric, avem ca $(\chi_e)^{-1}|G|$ este un intreg algebric rational, deci intreg. $\square$

Dupa cum vom vedea in continuare, are loc un rezultat mai bun decat acesta. Pentru a-l proba insa, avem nevoie sa definim si sa studiem o notiune noua legata de reprezentari liniare, anume produsul tensorial de reprezentari. Pentru aceasta, sa luam spre considerare posibilitatea existentei unor legaturi intre reprezentarile liniare (ireductibile) ale unui produs direct de grupuri si reprezentarile liniare (ireductibile) ale fiecaruia dintre factorii produsului. Ca sa investigam aceasta, avem nevoie de un instrument cu ajutorul caruia sa putem construi reprezentari liniare ale unui produs direct de grupuri pornind de la reprezentarile liniare ale factorilor produsului.

Definitia – propozitie 2.2. Fie $T_1 : G_1 \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}V_1)$ si $T_2 : G_2 \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}V_2)$ doua reprezentari liniare complexe. Definim *produsul tensorial exterior al reprezentarilor* T_1 si T_2 a fi aplicatia $T_1 \otimes T_2$ data prin

$$T_1 \otimes T_2 : G_1 \times G_2 \longrightarrow Aut(V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2)\,,\ \Big(T_1 \otimes T_2\Big)(g_1, g_2) := T_1(g_1) \otimes T_2(g_2),$$

pentru toti $g_1 \in G_1$ si toti $g_2 \in G_2$, une prin $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2$ am notat produsul tensorial (de module)[5] peste $\mathbb{C}$ al spatiilor vectoriale V_1 si V_2. Aplicatia astfel definita este o *reprezentare liniara complexa* a lui $G_1 \times G_2$, lucru care se probeaza prin calcul direct folosind comutativitatea compunerii cu produsul tensorial de aplicatii. Ea induce o structura de $\mathbb{C}[G_1 \times G_2]$-modul data de $(g_1, g_2)(x \otimes y) = g_1 x \otimes g_2 y$ pentru toti $g_1 \in G_1$ si toti $g_2 \in G_2$.

Daca $t^{(1)}$ este reprezentarea matriceala asociata reprezentarii T_1 intr-o baza $(e_i)_{i \in \overline{1,m}}$ si $t^{(2)}$ este reprezentarea matriceala asociata reprezentarii T_2 intr-o baza $(f_j)_{j \in \overline{1,n}}$, atunci reprezentarea matriceala asociata produsului tensorial exterior $T_1 \otimes T_2$ in baza $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ considerata cu ordinea lexicografica este data de $(g_1, g_2) \longrightarrow t^{(1)}(g_1) \otimes t^{(2)}(g_2)$, unde prin produsul tensorial a doua matrici patratice $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,m}}$ si $B = (b_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ intelegem

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & a_{12} \cdot B & \dots & a_{1m} \cdot B \\ a_{21} \cdot B & a_{22} \cdot B & \dots & a_{2m} \cdot B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot B & a_{m2} \cdot B & \dots & a_{mm} \cdot B \end{pmatrix}.$$

De aici are loc usor ca:

$$Tr\Big(t^{(1)}(g_1) \otimes t^{(2)}(g_2)\Big) = \sum_{i=1}^{m} t_{ii}^{(1)}(g_1) Tr\Big(t^{(2)}(g_2)\Big) = Tr\Big(t^{(1)}(g_1)\Big) \cdot Tr\Big(t^{(2)}(g_2)\Big).$$

Asadar *caracterul produsului tensorial a doua reprezentari liniare este produsul caracterelor reprezentarilor date.*

Mai mult, putem da un raspuns complet la problema ridicata in paragraful precedent acestei definitii. Mai precis, are loc rezultatul urmator.

Propozitia 2.7. (reprezentarile liniare complexe ireductibile ale unui produs direct de grupuri)

Cu notatiile din definitia anterioara au loc:

(i) Daca T_1 si T_2 sunt reprezentari ireductibile, atunci $T_1 \otimes T_2$ este o reprezentare liniara ireductibila a grupului $G_1 \times G_2$;

(ii) Toate reprezentarile liniare complexe ireductibile ale grupului $G_1 \times G_2$ sunt date de astfel de produse tensoriale, acestea din urma fiind doua cate doua neechivalente.

Demonstraţie. Fie $\chi^{(1)}$ caracterul reprezentarii T_1, $\chi^{(2)}$ caracterul reprezentarii T_2 si χ caracterul reprezentarii $T_1 \otimes T_2$. Atunci:

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{g_1, g_2} |\chi((g_1, g_2))|^2 = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1} |\chi^{(1)}(g_1)|^2 \frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2} |\chi^{(2)}(g_2)|^2 =$$

[5] notam ca aceasta notiune devenita acum standard pentru aproape orice curs de algebra generala care trateaza despre module isi are originea in incercarea de a formaliza potentiala legatura mentionata in paragraful premergator acestei definitii

$= \langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle \langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = 1.$

Pentru (ii) e suficient sa aratam ca singura functie centrala din $\mathcal{F}(G_1 \times G_2, \mathbb{C})$ ortogonala pe toate caracterele ce provin din produsele tensoriale de tipul celor de mai sus este functia nula. Fie f o asemenea functie. Atunci

$$\sum_{g_1, g_2} \overline{f(g_1, g_2)} \chi^{(1)}(g_1) \chi^{(2)}(g_2) = 0.$$

Notand cu $f'(g_1^{-1}) := \sum_{g_2} \overline{f(g_1, g_2)} \chi^{(2)}(g_2)$, relatia de mai sus se poate scrie ca

$$\sum_{g_1} f'(g_1) \overline{\chi^{(1)}(g_1)} = 0.$$

Cum f' este functie centrala si relatia are loc pentru toate caracterele ireductibile ale lui G_1, avem ca f' este functia nula.

De aici obtinem in mod analog ca functia centrala $f \in \mathcal{F}(G_1 \times G_2, \mathbb{C})$ trebuie sa fie functia nula. □

Sa mai remarcam ca toate cele prezentate in aceasta definitie precum si rezultatul abia demonstrat pot fi extinse fara dificultate la un produs direct finit arbitrar de grupuri.

Avem acum toate cele necesare pentru a putea stabili un rezultat mai bun decat cel probat anterior acestor consideratii in propozitia 2.6.

Teorema 2.8. (O conditie aritmetica pentru dimensiunea unei reprezentari liniare ireductibile – varianta tare, I. SCHUR)

Gradul d unei reprezentari liniare ireductibile $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ a unui grup finit G divide indicele centrului grupului $[G : C(G)]$[6].

Demonstraţie. (dupa JOHN TORRENCE TATE)

Fie $m > 0$ un numar natural arbitrar fixat si $T^{\otimes m}$ reprezentarea ireductibila data de:

$$\underbrace{T \otimes T \otimes \cdots \otimes T}_{m \quad ori} : G^m \longrightarrow Aut(\underbrace{V \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} V}_{m \quad ori}).$$

Dupa cum am vazut si pe parcursul demonstratiei propozitiei 1.5 de la pagina 12, din lema lui I. Schur deducem ca pentru orice reprezentare complexa ireductibila $\widetilde{T}$ a unui grup finit $\widetilde{G}$ si pentru orice element $\tilde{g} \in C(\widetilde{G})$, $\widetilde{T}_{\tilde{g}}$ este o omotetie. Asadar, daca $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ sunt din $C(G^m) = (C(G))^m$, avem ca $T_{g_i} = \lambda_i \cdot id_V$, pentru niste numere complexe $(\lambda_i)_{i \in \overline{1,m}}$, de unde obtinem imediat ca $T^{\otimes m}(g_1, g_2, \ldots, g_m) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot id_{V^{\otimes m}}$, unde prin $V^{\otimes m}$ s-a notat produsul tensorial $\underbrace{V \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} V}_{m \quad ori}$.

[6] Are loc chiar un rezultat mai puternic demonstrat de matematicianul japonez KIYOSHI ITO: d divide $[G : A]$, pentru orice subgrup normal abelian A al lui G (conform [11], pagina 474)

Fie $H \leq C(G^m)$ subgrupul cu $|C(G)|^{m-1}$ elemente definit de elementele urmatoarei multimi: $H = \{(g_1, g_2, \ldots, g_m) \in C(G^m) | g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_m = e\}$. Atunci pentru orice $(g_1, g_2, \ldots, g_m) \in H$ avem $id_V = T_e = T(g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_m) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot id_V$, de unde $\prod_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Din cele doua paragrafe de mai sus deducem ca $H \leq Ker(T^{\otimes m})$, deci ca putem defini reprezentarea

$$[T]^{\otimes m} : G^m/H \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V^{\otimes m})$$

data prin $[T]^{\otimes m}([x]) = T^{\otimes m}(x)$ pentru toti $x \in G^m$, unde cu $[x]$ s-a notat clasa de echivalenta a elementului x in G^m/H. Aceasta reprezentare este evident ireductibila, deci ii putem aplica varianta slaba a conditiei aritmetice pentru dimensiunea unei reprezentari liniare ireductibile data de propozitia 2.6. Obtinem ca $d^m \mid |G^m/H| = |G|^m/|C(G)|^{m-1} = [G : C(G)]^m |C(G)|$. Dar m a fost fixat in mod arbitrar, de unde deducem ca d divide $[G : C(G)]$. □

Sa remarcam ca propozitia 1.5 asupra reprezentarilor de grupuri abeliene, in cazul reprezentarilor liniare complexe, este o consecinta imediata a variantei tari a conditiei aritmetice pentru dimensiunea unei reprezentari liniare ireductibile abia demonstrata.

In finalul acestei sectiuni dam o ultima proprietate aritmetica legata de data aceasta de caracterele reprezentarilor liniare complexe nu neaparat ireductibile ale unui grup finit G. Procedeul de argumentare a acestui rezultat se inspira din constructia efectuata pe parcursul demonstratiei anterioare.

Propozitia 2.9. *Fie $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom cu coeficienti intregi iar χ un caracter al unei reprezentari liniare (nu neaparat ireductibile) $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ a unui grup finit G. Atunci numarul complex $\sum_{g \in G} P(\chi_g)$ este un intreg multiplu de $|G|$.*

Demonstrație. Presupunem intai ca $P(X) = X$. Fie χ' caracterul trivial al lui G ($\chi'_g = 1$ pentru toti $g \in G$). Atunci $\sum_{g \in G} \chi_g = \sum_{g \in G} \chi_g \overline{\chi'_g} = |G| \langle \chi, \chi' \rangle$ numar complex care este un intreg multiplu de G, potrivit unui argument de tipul celui folosit in gasirea conditiei de ireductibilitate din remarca 2.2 de la pagina 21.

Fie acum $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar fixat si $P(X) = X^n$. Consideram reprezentarea $T^{(n)}_{diag} : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V^{\otimes n})$ data de $T^{(n)}_{diag}(g) = T^{\otimes n}(\underbrace{g, g, \ldots, g}_{n \ \ ori})$ si $\chi^{(n)}_{diag}$ caracterul asociat acesteia. Atunci $\sum_{g \in G} \chi^{(n)}_{diag}(g)$ este un intreg multiplu de $|G|$. Dar pe de alta parte $\chi^{(n)}_{diag}(g) = (\chi_g)^n$, pentru orice $g \in G$. Deci proprietatea din enunt este adevarata pentru toate monoamele X^n, si cum orice polinom $P \in \mathbb{Z}[X]$ este o combinatie $\mathbb{Z}$-liniara de astfel de monoame, demonstratia este incheiata. □

Capitolul 3

Tabele de caractere complexe. Exemple concrete clasice

3.1 Tabele de caractere

Am pornit in aceasta lucrare de la ideea de a studia un grup finit luat spre considerare prin prisma ipostazelor lui ca grupuri de matrici. A vazut pe parcurs ca, in anumite conditii, studiul acestor ipostaze se reduce la studiul unor ipostaze ireductibile, iar studiul acestora este echivalent cu studiul urmelor matricelor prin care se realizeaza grupul luat spre investigare.

Folosindu-ne iar si iar de lema lui I. Schur si de o serie de argumente de felul argumentului de ,,mediere" folosit in demonstrarea proprietatii de totala decompozabilitate a lui H. Maschke, am reusit sa probam in sectiunea a doua a capitolului precedent o serie de relatii revelatoare legate de urmele de matrici mai sus mentionate, pentru ca in ultima sectiune a aceluiasi capitol sa completam aceste rezultate cu mai multe proprietati aritmetice ale acestora.

La capatul acestui efort sintetizam intr-o anumita masura toate cele dobandite pana acum prin urmatoarea constructie.

Definitia 3.1. Fie G un grup finit, $(C_i)_{i\in\overline{1,s}}$ clasele sale de conjugare si $(\chi^{(i)})_{i\in\overline{1,s}}$ caracterele lui G asociate reprezentarilor sale liniare complexe ireductibile. Matricea patratica $(\chi^{(i)}(C_j))_{i,j\in\overline{1,s}}$ se numeste *tabel de caractere* al grupului G.

Pentru fiecare grup in parte acesta este unic pana la o renumerotare a claselor de conjugare si a caracterelor ireductibile. De obicei, prima clasa de conjugare e data de clasa elementului neutru iar primul caracter considerat este cel trivial.

Forma grafica sub care se prezinta un tabel de caractere in general este data de urmatorul tablou:

	h_1	$\dots$	h_j	$\dots$	h_s
	C_1	$\dots$	C_j	$\dots$	C_s
$\chi^{(1)}$	$\chi^{(1)}(C_1)$	$\dots$	$\chi^{(1)}(C_j)$	$\dots$	$\chi^{(1)}(C_s)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\chi^{(i)}$	$\chi^{(i)}(C_1)$	$\dots$	$\chi^{(i)}(C_j)$	$\dots$	$\chi^{(i)}(C_s)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\chi^{(s)}$	$\chi^{(s)}(C_1)$	$\dots$	$\chi^{(s)}(C_j)$	$\dots$	$\chi^{(s)}(C_s)$

unde $h_j = |C_j|$ pentru toti $j \in \overline{1,s}$. Cateodata prima linie a unui astfel de tablou este inlocuita cu o linie ce contine cate un reprezentant din fiecare clasa de conjugare a grupului dat.

Formulele de ortonormalitate 2.3 si 2.4 se traduc pe tabel in ,,ortonormalitatea" liniilor iar formulele de ortogonalitate stabilite in propozitia 2.3 se transpun prin ,,ortogonalitatea" coloanelor[1]. Formula 2.6 ce leaga dimensiunile reprezentarilor ireductibile de ordinul grupului este si ea incapsulata de un astfel de tabel de caractere. Remarca (foarte folositoare in sine) si propozitia de mai jos stabilesc ce se poate afla despre un grup avand la dispozitie tabelul de caractere al acestuia.

Remarca 3.1. (*caracterele ireductibile ale grupului factor*)

Fie G un grup si H un subgrup normal al sau. Atunci exista o corespondenta bijectiva intre multimea caracterelor complexe ireductibile ale grupului factor G/H si multimea caracterelor complexe ireductibile ale lui G al caror nucleu[2] contine pe H. In plus, intersectia nucleelor acestora din urma este chiar H

Intr-adevar, daca $(\overline{T}^{(i)})_{i\in\overline{1,r}}$ sunt reprezentarile liniare complexe ireductibile ale grupului factor G/H de caractere $(\overline{\chi}^{(i)})_{i\in\overline{1,r}}$, si $\pi : G \longrightarrow G/H$ este proiectia canonica, atunci asocierea $\overline{\chi}^{(i)} \longrightarrow \chi_\pi^{(i)}$, unde prin $\chi_\pi^{(i)}$ s-a notat caracterul reprezentarii liniare ireductibile $\overline{T}^{(i)} \circ \pi$ a grupului G, da corespondenta cautata.

Sa notam acum cu $\overline{T}_{reg}$ reprezentarea regulata a grupului factor G/H. Cum in general reprezentarea regulata a unui grup are nucleul trivial, si aceasta se scrie ca o suma directa ce cuprinde in mod nebanal toate reprezentarile ireductibile asociate grupului dat (conform remarcei 2.3 de la pagina 21), obtinem in cazul particular al grupului G/H ca $\{H\} = Ker(\overline{T}_{reg}) = \bigcap_{i=1}^{r} Ker(\overline{\chi}^{(i)})$. Asadar avem ca $H = \bigcap_{i=1}^{r} Ker(\chi_\pi^{(i)})$.

[1]cu precautia de a tine seama in scrierea acestor formule si de numerele $h_j = |C_j|$ ce intervin

[2]prin nucleul unui caracter se intelege nucleul reprezentarii ireductibile asociate

Propozitia 3.1. (informatiile continute intr-un tabel de caractere)

Date clasele de conjugare $(C_i)_{i\in\overline{1,s}}$ *ale unui grup finit* G *impreuna cu matricea tabelului de caractere* $(\chi^{(i)}(C_j))_{i,j\in\overline{1,s}}$*, a acestuia se pot determina urmatoarele*[3]*:*

(i) gradele caracterelor ireductibile ale lui G*;*

(ii) ordinul $|G|$*;*

(iii) ordinele centralizatorilor elementelor;

(iv) ordinele claselor de conjugare ale elementelor;

(v) subgrupurile normale ale lui G*;*

(vi) coeficientii h_{ijk} *ce dau inmultirea claselor de conjugare* $(C_i)_{i\in\overline{1,s}}$*;*

(vii) tabla de inmultire a centrului $C(G)$ *al grupului* G*.*

Demonstraţie. Proprietatatile elementare (1) si (5) ale caracterelor ne dau (i), formula 2.6 ne da (ii) iar formulele de ortogonalitate date in propozitia 2.3 ne dau (iii) si (iv). Cu ajutorul remarcei de dinainte se stabileste usor (v). Spre exemplu, subgrupul comutator G' este intersectia nucleelor caracterelor de dimensiune unu.

Pentru a demonstra (vi), sa ne aducem aminte de procedeul de demonstratie folosit in stabilirea formulelor de ortogonalitate. Am construit atunci aplicatiile liniare A_{ij} cu proprietatile:

$$A_{ij} = \tfrac{|C_j|}{\chi_e^{(i)}}\chi^{(i)}(C_j)\cdot id_{V_i} \text{ si } A_{ij}A_{il} = \sum_{k=1}^{s} h_{jlk}A_{ik}$$

pentru toti i, j si l pentru care au sens. Reunind acestea doua obtinem ca are loc

$$\frac{|C_j|\chi^{(i)}(C_j)}{\chi_e^{(i)}}\frac{|C_l|\chi^{(i)}(C_l)}{\chi_e^{(i)}} = \sum_{k=1}^{s} h_{jlk}\frac{|C_k|\chi^{(i)}(C_k)}{\chi_e^{(i)}},$$

de unde prin inmultire cu $\chi_e^{(i)}\overline{\chi^{(i)}(C_r)}$ si sumare dupa i obtinem, folosindu-ne inca o data de relatiile de ortogonalitate:

$$h_{jlr}|G| = |C_j||C_l|\sum_{i=1}^{s}\frac{\chi^{(i)}(C_j)\chi^{(i)}(C_l)\overline{\chi^{(i)}(C_r)}}{\chi_e^{(i)}}.$$

Deci coeficientii h_{ijk} pot fi determinati. Ei definesc complet inmultirea elementelor din $C(G)$, intrucat clasa de conjugare a oricarui element din $C(G)$ este formata din acel element. □

Sa observam ca aceasta propozitie ne da in particular faptul ca daca doua grupuri finite au aceeasi tabel de caractere, atunci ele au aceeasi tabla de inmultire formala a claselor de conjugare. Notam fara a demonstra ca are loc si reciproca acestui rezultat[4].

[3] mentionam ca in conditiile date nu se cunosc apriori numerele $(|C_i|)_{i\in\overline{1,s}}$ si nici care este clasa de conjugare a elementului neutru al grupului

[4] pentru o demonstratie a acestui fapt se pot consulta paginile 197-200 din [1] sau paginile 226-229 din [6]

3.2 Tabelele caracterelor complexe ale grupurilor $\mathbb{K}$ si $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; S_3; Q si D_4

Aceasta sectiune impreuna cu cele care ii urmeaza sunt dedicate in exclusivitate aplicarii sistematice a celor expuse pana acum la calculul tabelelor de caractere complexe si, acolo unde este posibil, la determinarea reprezentarilor liniare ireductibile asociate pentru o serie intreaga de grupuri clasice.

Prezentam in continuare prin intermediul unei serii de exercitii tabelele caracterelor complexe ireductibile corespunzatoare grupurilor enumerate in titlul acestei sectiuni.

Exercitiul 1. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului lui F. Klein*)

Fie $\mathbb{K} = \{e, s, t, st\}$ grupul lui F. Klein. Acesta este comutativ, deci toate caracterele complexe ireductibile ale sale sunt de gradul intai. Asadar ele sunt in numar de 4. Mai mult, intrucat orice element din grupul $\mathbb{K}$ are ordinul cel mult 2, fiecare din ele reprezinta un morfism de grupuri de la $\mathbb{K}$ la $(\{1, -1\}, \cdot) \subset \mathbb{C}$. Tabelul caracterelor complexe se determina acum usor a fi

	C_1	$C_2 = \{s\}$	$C_3 = \{t\}$	$C_4 = \{st\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	-1	-1	1

Exercitiul 2. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$)

Fie $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{e, g, g^2, g^3\}$ grupul ciclic cu patru elemente. Acesta este comutativ, deci toate caracterele complexe ireductibile ale sale sunt de gradul intai. Asadar ele sunt in numar de 4. Mai mult, intrucat orice element din grupul $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ are ordinul 1,2 sau 4, fiecare din ele reprezinta un morfism de grupuri de la $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ la $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot) \subset \mathbb{C}$. Tabelul caracterelor complexe se determina acum usor a fi

	C_1	$C_2 = \{g\}$	$C_3 = \{g^2\}$	$C_4 = \{g^3\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1
$\chi^{(3)}$	1	i	-1	$-i$
$\chi^{(4)}$	1	$-i$	-1	i

Exercitiul 3. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului de permutari* S_3)

Fie S_3 grupul permutarilor cu trei elemente. Clasele de conjugare ale acestuia sunt:

$$C_1 = \{(1)\}, C_2 = \{(12), (13), (23)\}, C_3 = \{(123), (132)\}.$$

Asadar S_3 are trei reprezentari liniare complexe ireductibile.

Reprezentarea triviala si cea data de functia signatura (numita *reprezentarea alternanta*) sunt doua reprezentari liniare distincte de gradul intai, deci ireductibile, ale lui S_3. Ce-a de a treia are dimensiunea d data de $3! = 6 = 1^2 + 1^2 + d^2$, de unde $d = 2$.

Ultimele doua pozitii ramase necompletate in tabelul de caractere pot fi acum gasite usor cu ajutorul relatiilor de ortogonalitate a coloanelor. Tabelul de caractere complexe ireductibile ale lui S_3 este dat de:

	C_1	C_2	C_3
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	2	0	-1

Exercitiul 4. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului Q al cuaternionilor*)

Fie $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ grupul cuaternionilor. Clasele de conjugare ale lui Q sunt, dupa cum se constata imediat, urmatoarele:

$$C_1 = \{1\},\ C_2 = \{-1\},\ C_3 = \{i, -i\},\ C_4 = \{j, -j\} \text{ si } C_5 = \{k, -k\}.$$

Cum in general orice subgrup de indice 2 al unui grup este normal, rezulta ca subgrupurile $< i >$, $< j >$ si $< k >$ sunt normale in Q. In acord cu remarca 3.1 din sectiunea precedenta, caracterele ireductibile netriviale ale grupurilor factor prin aceste subgrupuri induc pe Q caracterele ireductibile $(\chi^{(l)})_{l\in\{2,3,4\}}$ date prin

$$\chi_g^{(1)} = \begin{cases} 1 & daca \quad g \in < i > \\ -1 & altfel \end{cases}$$

si analoagele.

Al cincilea caracter ireductibil al grupului Q are dimensiune 2, iar valorile lui se determina imediat din formulele de ortogonalitate a coloanelor. Tabelul caracterelor complexe ale grupului cuaternionilor are astfel urmatoarea forma:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

Exercitiul 5. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului diedral D_4*)

Fie $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ grupul simetriilor plane ale patratului. Printr-un calcul usor, clasele de conjugare ale lui D_4 se verifica a fi:

$$C_1 = \{1\},\ C_2 = \{r^2\},\ C_3 = \{r, r^3\},\ C_4 = \{s, sr^2\} \text{ si } C_5 = \{sr, sr^2\}.$$

Subgrupurile $< r >$, $< r^2, s >$ si $< r^2, sr >$ sunt de indice 2, deci normale in D_4. Caracterele ireductibile netriviale ale grupurilor factor prin aceste subgrupuri induc pe D_4 trei caractere ireductibile care iau fiecare valoarea 1 pe subgrupul normal prin care se factorizeaza si -1 in rest.

Al cincilea caracter ireductibil al grupului diedral de ordin 4 are dimensiune 2, iar valorile lui se determina imediat din formulele de ortogonalitate a coloanelor. Tabelul caracterelor complexe ale grupului D_4 are astfel urmatoarea forma:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

Remarcam in finalul acestei sectiuni ca grupul cuaternionilor si grupul diedral de ordinul 4 s-au dovedit a avea acelasi tabel de caractere. Notam in legatura cu aceasta ca in cadrul teoriei grupurilor finite s-au intreprins cercetari in problema generala a determinarii pana la un izomorfism a tuturor grupurilor care admit un acelasi tabel de caractere. In acest sens, spre exemplu, un rezultat obtinut de T. Oyama in anul 1964 si expus intr-o varianta schitata in [7], paginile 205-208, arata ca orice grup care are acelasi tabel de caractere cu un grup altern A_n este izomorf cu acest grup altern. Un alt rezultat din aceeasi categorie expus in lucrarea mai sus mentionata arata ca grupul sporadic simplu J_1 descoperit de matematicianul croat Zvonimir Janko in anul 1965 este singurul grup care admite tabelul de caractere al acestuia. Acest tip de rezultate s-au dovedit importante in teoria clasificarii grupurilor finite simple.

3.3 Tabelele caracterelor complexe ale grupurilor A_4 si S_4, A_5 si S_5

Pentru aceasta noua serie de aplicatii vom vedea pe parcurs cum introducerea unor notiuni noi inspirate din algebra multiliniara va usura in mod considerabil sarcina de a gasi toate caracterele ireductibile complexe asociate grupurilor expuse in aceasta sectiune.

Exercitiul 6. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului altern* A_4)

Fie A_4 grupul altern al permutarilor pare cu 4 elemente. Clasele de conjugare ale lui A_4 se determina prin calcul direct a fi

$$C_1 = \{(1)\},\ C_2 = \{(12)\cdot(34), (13)\cdot(24), (14)\cdot(23)\}$$
$$C_3 = \{(123), (214), (341), (432)\},\ C_4 = \{(132), (241), (314), (423)\}.$$

Subgrupul $H = \{(1), (12)\cdot(34), (13)\cdot(24), (14)\cdot(23)\} = C_1 \cup C_2$ este singurul subgrup normal al lui A_4. Grupul factor A_4/H are ordinul 3 deci este ciclic. El admite 3 reprezentari liniare complexe ireductibile care se verifica usor a fi $T_i : A_4/H \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$T_1(\sigma \cdot H) = 1 \text{ pentru toti } \sigma \in A_4$$
$$T_2(H) = 1,\ T_2((123)H) = \varepsilon \text{ si } T_2((132)H) = \varepsilon^2$$
$$T_3(H) = 1,\ T_3((123)H) = \varepsilon^2 \text{ si } T_3((132)H) = \varepsilon,$$

unde ε este radacina primitiva de ordinul 3 a unitatii $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Compunand morfismul surjectiv canonic $A_4 \longrightarrow A_4/H$ cu reprezentarile liniare date mai sus obtinem 3 reprezentari liniare complexe de gradul intai (deci ireductibile) pentru A_4. Cea de-a patra are dimensiunea 3, conform formulei 2.6 ce leaga dimensiunile reprezentarilor ireductibile de ordinul grupului, iar caracterul ei se deduce acum imediat din relatiile de ortogonalitate a coloanelor. Tabelul caracterelor complexe ale lui A_4 se determina astfel a fi

	C_1	C_2	C_3	C_4
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	ε	ε^2
$\chi^{(3)}$	1	1	ε^2	ε
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	0

Pentru exercitiile care urmeaza vom face cateva remarci mai generale care pot fi folositore in determinarea tabelelor de caractere complexe pentru o serie de cazuri particulare de grupuri finite.

Remarca – definitie 3.2. (*reprezentarea standard*)

Fie n un numar natural fixat. Grupul de permutari cu n elemente S_n admite in mod canonic o reprezentare liniara de dimensiune n, $T : S_n \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n)$ data pe baza canonica $(e_i)_{i\in\overline{1,n}}$ prin $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pentru toate $\sigma \in S_n$, sau echivalent:

$$T_\sigma(z_1, \ldots, z_n) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(n)}),\ \text{pentru toti } (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

numita *reprezentarea prin permutari a lui S_n*. Se verifica usor ca in cazul acestei reprezentari urma aplicatiei T_σ este data de numarul de puncte fixate de σ.

Reprezentarea T nu este ireductibila intrucat subspatiul vectorial generat de vectorul $\sum_{i=1}^{n} e_i$ este invariat de toate T_σ. Complementul ortogonal al acestuia notat cu $V := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^{n} z_i = 0\}$ ne da in mod natural reprezentarea liniara complexa $T_{st} : S_n \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}V)$ data prin $T_{st}(\sigma) = T_\sigma$ pentru toti $\sigma \in S_n$, numita *reprezentarea standard a grupului S_n*. Conform proprietatii elementare (8) a caracterelor, avem ca $Tr(T_\sigma) = Tr(T_{st}(\sigma)) + 1$, intrucat T este suma directa a reprezentarii standard cu reprezentarea triviala.

Folosind criteriul de ireductibilitate dat in remarca 2.2 de la pagina 21 se poate observa usor ca in cazul $n = 3$ reprezentarea standard este ireductibila. Asadar in cazul grupului S_3 reprezentarile liniare complexe ireductibile ale sale sunt date de reprezentarea triviala, reprezentarea alternanta si reprezentarea standard.

Remarca – definitie 3.3. (*produsul tensorial interior de reprezentari liniare*)

In corespondenta cu cele prezentate in definita 2.2 de la pagina 25, sa consideram acum T_1 si T_2 doua reprezentari liniare ale unui aceluiasi grup finit G, $T_1 : G \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}V_1)$ si $T_2 : G \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}V_2)$.Numim *produsul tensorial interior al reprezentarilor T_1 si T_2* a fi aplicatia notata la fel ca produsul tensorial exterior prin $T_1 \otimes T_2$ data de

$$T_1 \otimes T_2 : G \longrightarrow Aut(V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2)\,,\ \Big(T_1 \otimes T_2\Big)(g_1, g_2) := T_1(g_1) \otimes T_2(g_2),$$

pentru toti $g_1, g_2 \in G$.

La fel ca in cazul produsului tensorial exterior, aceasta aplicatie defineste o reprezentare liniara a lui G a carui caracter este dat de produsul caracterelor reprezentarilor T_1 si T_2.

Mai notam ca spre deosebire de cazul produsului tensorial exterior insa, nu intotdeauna un produs tensorial interior de reprezentari liniare ireductibile este ireductibil (daca ar fi asa, ar insemna ca orice grup finit admite o multime numarabila de reprezentari liniare complexe ireductibile, ceea ce evident nu este cazul). In schimb, in anumite cazuri particulare aceasta proprietate poate avea loc. Spre exemplu, in cazul grupurilor de permutari, produsul tensorial interior dintre o reprezentare ireductibila si reprezentarea alternanta este intotdeuna o reprezentare ireductibila, dupa cum se poate verifica usor cu ajutorul criteriului dat in remarca 2.2. Astfel, produsul tensorial interior de reprezentari poate fi un instrument folositor in a construi reprezentari ireductibile noi.

Remarca – definitie 3.4. (*puterea exterioara si puterea simetrica ale unei reprezentari liniare*)

Un alt mod de a construi reprezentari liniare noi ne este furnizat de algebra multiliniara. Fie astfel $T : G \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}V)$ o reprezentare liniara complexa a unui

grup finit G. Numim *puterea exterioara de ordinul* k a reprezentarii liniare T, aplicatia $\wedge^k T : G \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}\wedge^k V)$ data prin

$$\wedge^k T_g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := T_g(v_1) \wedge \cdots \wedge T_g(v_k),$$

pentru toti $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \wedge^k V$ si toti $g \in G$.

In mod similar, numim *puterea simetrica de ordinul* k a reprezentarii liniare T, aplicatia $S^k T : G \longrightarrow Aut(_{\mathbb{C}}S^k V)$ data prin

$$S^k T_g(v_1 \cdot \cdots \cdot v_k) := T_g(v_1) \cdot \cdots \cdot T_g(v_k),$$

pentru toti $v_1 \cdot \cdots \cdot v_k \in S^k V$ si toti $g \in G$.

Aceste aplicatii astfel definite formeaza noi reprezentari liniare complexe ale grupurilor considerate. Dimensiunile lor sunt date de

$$dim(\wedge^k T) = \tbinom{dimV}{k} \text{ si } dim(S^k T) = \tbinom{dimV+k-1}{k}.$$

Sa calculam caracterele acestor reprezentari liniare in cazul $k = 2$. Daca pentru o aplicatie $T \in Aut(_{\mathbb{C}}V)$ notam cu $(\lambda_i)_{i\in\overline{1,n}}$ valorile proprii ale sale, atunci valorile proprii ale aplicatiei liniare $\wedge^2 T \in Aut(_{\mathbb{C}}\wedge^2 V)$ sunt date de $(\lambda_i\lambda_j)_{1\leq i<j\leq n}$. Asadar, cu notatiile de mai sus, avem:

$$Tr(\wedge^2 T_g) = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}[(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2] = \frac{1}{2}[Tr^2(T_g) - Tr(T_{g^2})].$$

Cum $V\otimes V = S^2V \oplus \wedge^2 V$, iar caracterul produsului tensorial interior este produsul caracterelor ce apar in produs, avem ca

$$Tr(S^2 T_g) = Tr^2(T_g) - Tr(\wedge^2 T_g) = \frac{1}{2}[Tr^2(T_g) + Tr(T_{g^2})].$$

Sa sintetizam cele discutate in ultimele doua remarci prin urmatoarea lista de proprietati ale caracterelor:

(9) $\chi_{T\otimes T'} = \chi_T \cdot \chi_{T'}$;

(10) $\chi_{\wedge^2 T}(g) = \frac{1}{2}[\chi_T(g)^2 - \chi_T(g^2)]$;

(11) $\chi_{S^2 T}(g) = \frac{1}{2}[\chi_T(g)^2 + \chi_T(g^2)]$;

unde proprietatea (9) are loc, dupa cum am vazut, atat pentru produse tensoriale exterioare cat si pentru produse tensoriale interioare.

Avem acum la dispozitie suficiente instrumente pentru a rezolva urmatoarele exercitii fara prea mari dificultati.

Exercitiul 7. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului de permutari* S_4)

Fie S_4 grupul permutarilor cu 4 elemente. Acesta are 5 clase de conjugare date de

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{(1)\} \\
C_2 &= \text{multimea ciclurilor de lungime } 2 - 6 \text{ elemente} \\
C_3 &= \text{multimea ciclurilor de lungime } 3 - 8 \text{ elemente} \\
C_4 &= \text{multimea ciclurilor de lungime } 4 - 6 \text{ elemente} \\
C_5 &= \{(12)\cdot(34), (13)\cdot(24), (14)\cdot(23)\}.
\end{aligned}
$$

Reprezentarea triviala si cea alternanta sunt reprezentari ireductibile ale lui S_4. Folosindu-ne de cele observate in remarca 3.2, caracterul reprezentarii standard este dat de diferenta dintre caracterul reprezentarii prin permutari si caracterul reprezentarii triviale, anume $(4, 2, 1, 0, 0) - (1, 1, 1, 1, 1) = (3, 1, 0, -1, -1)$.

Utilizand criteriul de ireductibilitate dat in remarca 2.2 avem ca reprezentarea standard este ireductibila. Conform remarcei de mai inainte, produsul tensorial interior dintre aceasta si reprezentarea alternanta este o a patra reprezentare liniara complexa ireductibila a lui S_4, diferita de toate celelalte.

Dimensiunea d a celei de a cincea reprezentari ireductibile a lui S_4 verifica $4! = 24 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + d^2$, de unde $d = 2$. Valorile caracterului ei se deduc acum usor din relatiile de ortogonalitate a coloanelor. Tabelul de caractere complexe al lui S_4 este determinat astfel a fi

	1	6	8	6	3
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	3	1	0	-1	-1
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	1	-1
$\chi^{(5)}$	2	0	-1	0	2

Sa remarcam ca din acest tabel, finalizat cu ajutorul relatiilor de ortogonalitate, putem deduce in mod explicit care este ce-a de a cincea reprezentare ireductibila a lui S_4. Cum $\chi^{(5)}(C_1)$ si $\chi^{(5)}(C_5)$ sunt singurele care iau valoarea 2 (= dimensiunea reprezentarii) in ultima linie a tabelului, rezulta ca multimea $H := C_1 \cup C_2$ da nucleul reprezentarii cautate. Grupul factor S_4/H este un grup necomutativ cu 6 elemente, deci este izomorf cu S_3. Reprezentarea lui S_4/H obtinuta prin factorizare este ireductibila (conform remarcei 3.1) si de dimensiune 2, deci ea trebuie sa fie reprezentarea standard. Astfel, a cincea reprezentare a lui S_4 este data de compunerea surjectiei canonice $S_4 \longrightarrow S_4/H$ cu reprezentarea standard a lui S_3.

Exercitiul 8. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului de permutari* S_5)

Fie S_5 grupul permutarilor cu 5 elemente. Acesta are 7 clase de conjugare date de

$$\begin{aligned}
&C_1 = \{(1)\}\\
&C_2 = \text{multimea ciclurilor de lungime } 2 - 10 \text{ elemente}\\
&C_3 = \text{multimea ciclurilor de lungime } 3 - 20 \text{ de elemente}\\
&C_4 = \text{multimea ciclurilor de lungime } 4 - 30 \text{ de elemente}\\
&C_5 = \text{multimea ciclurilor de lungime } 5 - 24 \text{ de elemente}\\
&C_6 = \text{elementele conjugate cu } (12)(34) - 15 \text{ elemente}\\
&C_7 = \text{elementele conjugate cu } (12)(345) - 20 \text{ de elemente}
\end{aligned}$$

Pe langa reprezentarea triviala si cea alternanta, reprezentarea standard (de caracter $(5,3,2,1,0,1,0) - (1,1,1,1,1,1,1) = (4,2,1,0,-1,0,-1)$) si cea obtinuta prin tensorizarea acesteia cu reprezentarea alternanta sunt inca doua reprezentari ireductibile si distincte ale lui S_5. Aceasta se poate proba usor cu ajutorul criteriului de ireductibilitate dat de remarca 2.2 de la pagina 2.2 si a relatiilor de ortonormalitate 2.4 de la pagina 2.4.

Mai avem nevoie de caracterele a inca trei reprezentari ireductibile. Tensorizand reprezentarea standard cu ea insasi obtinem $T_{st} \otimes T_{st} = \wedge^2 T_{st} \oplus S^2 T_{st}$. Calculul caracterelor celor doua reprezentari din suma directa ne da ca $\wedge^2 T_{st}$ este o reprezentare ireductibila de caracter $(6,0,0,0,1,-2,0)$.

Daca notam cu d_1 si d_2 dimensiunile ultimelor doua reprezentari liniare ireductible, gasim ca $5! = 120 = 1^2 + 1^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2$, de unde $d_1 = d_2 = 5$, sau $\{d_1, d_2\} = \{1, 7\}$. Cum 7 nu divide $5! = |S_5|$, doar prima posibiliate are loc. Raman astfel de completat pozitiile 2 - 7 ale ultimelor doua linii ale tabelului, lucru ce poate fi realizat, ca de obicei, folosind formulele de ortogonalitate a coloanelor. Tabelul caracterelor complexe ale lui S_5 este

	1	10	20	30	24	15	20
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	4	2	1	0	-1	0	-1
$\chi^{(4)}$	4	-2	1	0	-1	0	1
$\chi^{(5)}$	6	0	0	0	1	-2	0
$\chi^{(6)}$	5	1	-1	-1	0	1	1
$\chi^{(7)}$	5	-1	-1	1	0	1	-1

Sa observam acum din tabelul de caractere obtinut ca ultimele doua reprezentari se obtin una din cealalta prin tensorizarea cu reprezentarea alternanta.

Exercitiul 9. (*Tabelul caracterelor complexe ale grupului altern* A_5)

Fie A_5 grupul permutarilor pare cu 5 elemente. Acesta are 5 clase de conjugare date de

$$C_1 = \{(1)\}$$

$$C_2 = \text{multimea ciclurilor de lungime 3} - 20 \text{ de elemente}$$

$$C_3 = \text{elementele conjugate cu } (12)(34) - 15 \text{ elemente}$$

$$C_4 = \text{elementele conjugate cu } (12345) - 12 \text{ elemente}$$

$$C_5 = \text{elementele conjugate cu } (21345) - 12 \text{ elemente}$$

Este natural acum sa cautam reprezentari liniare complexe ireductibile pentru A_5 printre restrictiile reprezentarilor ireductibile ale lui S_5. In acest sens, este de observat ca o reprezentare ireductibila a lui S_5 poate deveni reductibila atunci cand este restrictionata la A_5; este cazul reprezentarii $\wedge^2 T_{st}$ pentru care $\langle \wedge^2 T_{st|A_5}, \wedge^2 T_{st|A_5} \rangle = 2$.

Doua reprezentari distincte pot deveni echivalente prin restrictionare. Mai exact, prin restrictionare la A_5 reprezentarea triviala este echivalenta cu cea alternanta, de unde reprezentarea standard este echivalenta (prin restrictionare la A_5) cu cea obtinuta prin tensorizarea acesteia cu reprezentarea alternanta la fel cum cele doua reprezentari de dimensiune 5 restrictionate la grupul altern sunt echivalente intre ele.

Asadar restrictiile la A_5 ale reprezentarii triviale, reprezentarii standard si a uneia dintre reprezentarile de dimensiune 5 dau trei dintre reprezentarile ireductibile ale lui A_5.

Celelalte doua reprezentari liniare complexe ireductibile ale lui A_5 sunt amandoua de dimensiune 3, si provin in mod evident din descompunerea reprezentarii $\wedge^2 T_{st}$.

Cu ajutorul relatiilor de ortogonalitate a coloanelor, tabelul de caractere complexe al grupului altern A_5 poate fi acum completat. Acesta este:

	1	20	15	12	12
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	4	1	0	-1	-1
$\chi^{(3)}$	5	-1	1	0	0
$\chi^{(4)}$	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$\chi^{(5)}$	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Dupa cum am notat deja, clasa de conjugare din S_5 a ciclilor de lungime 5 se deface in doua clase de conjugare prin restrictionare la A_5. Acest fapt explica diferentele de valori dintre caracterele primelor trei reprezentari din tabelul de

mai sus si caracterele reprezentarilor corespunzatoare date in tabelul caracterelor complexe ale lui S_5.

In finalul acestei sectiuni facem cateva remarci ce se desprind din tabelele de caractere complexe expuse.

Grupul altern A_5 este simplu. Acest rezultat elementar binecunoscut se poate desprinde usor de pe tabelul de caractere, tinand seama ca orice subgrup normal al sau este o intersectie de nuclee de caractere complexe ireductibile. Aceasta observatie sugereaza un mod general de a decide daca un grup finit dat este simplu sau nu.

Toate caracterele ireductibile complexe de grad ≥ 2 din tabelele prezentate in ultimele doua sectiuni admit macar o valoare nula. Acest fapt nu este intamplator, el fiind adevarat pentru orice caracter ireductibil complex de grad ≥ 2. O demonstratie a acestui rezultat se poate gasi in paginile 195-196 din lucrarea [1].

3.4 Reprezentarile liniare complexe ireductibile ale grupurilor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n si D_{nh}

Grupul ciclic $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de ordinul n poate fi vizualizat drept grupul rotatiilor plane de unghi $2k\pi/n$ in jurul originii. Este un grup comutativ, deci admite exact n reprezentari liniare complexe ireductibile, toate de gradul intai. Sa consideram elementul 1 drept generator al grupului. O astfel de reprezentare $T^{(j)}$ este perfect determinata de asocierea $1 \longrightarrow T_1^{(j)} \in \mathbb{C}^*$. Cum $n \cdot 1 = 0$, avem ca $T_1^{(j)}$ este o radacina de ordinul n a unitatii. Astfel, reprezentarile liniare complexe ireductibile ale grupului ciclic de ordin n sunt date de:

$$T^{(j)} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*,\ T_1^{(j)} = \cos \tfrac{2\pi j}{n} + i \sin \tfrac{2\pi j}{n}.$$

Asadar, matricea caracterelor complexe ireductibile in acest caz este data de

$$\left(\cos \frac{2\pi jk}{n} + i \sin \frac{2\pi jk}{n} \right)_{1 \leq j,k \leq n}.$$

Grupul diedral D_n de ordinul n poate fi vizualizat drept grupul rotatiilor si simetriilor planului care invariaza un poligon regulat cu n varfuri. Acesta contine n rotatii care formeaza un subgrup izomorf cu grupul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si n simetrii. Ordinul sau este $2n$. Daca notam cu r rotatia de unghi $2\pi/n$ si cu s una dintre simetrii, atunci grupul D_n poate fi redat prin generatori si relatii astfel:

$$r^n = 1, \quad s^2 = 1, \quad srs = r^{-1}. \tag{3.1}$$

Asadar, orice reprezentare liniara a grupului diedral este perfect determinata de valorile acesteia pe elementele r si s. In plus, orice element al grupului se scrie sub forma r^k sau sub forma sr^k, pentru un $k \in \overline{0, n-1}$.

Sa determinam reprezentarile liniare de gradul intai. Fie $T : D_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ o astfel de reprezentare. Atunci pe baza relatiilor de mai sus $T_r^2 = 1$ si $T_s T_r T_s T_r = 1$. Asadar $Im(T) \subseteq \{1, -1\}$, de unde obtinem doua reprezentari de gradul intai, daca n este impar

n *impar*	r^k	sr^k
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1

si patru reprezentari de gradul intai, daca n este par

n *par*	r^k	sr^k
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1
$\chi^{(3)}$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\chi^{(4)}$	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Sa determinam acum reprezentarile de gradul 2. Fie $T : D_n \longrightarrow Gl_2(\mathbb{C})$ o astfel de reprezentare data in forma matriceala. Atunci, ca mai sus, $det(T_r^2) = 1$ si $det(T_s T_r T_s T_r) = 1$. Deducem ca $det(T_s) = det(T_r) = \pm 1$.

Facand abstractie de o echivalenta de reprezentari matriceale, putem considera ca T_r este o matrice diagonala notata prin

$$T_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Atunci $\lambda_1^n = \lambda_2^n = 1$ si $\lambda_1 \lambda_2 = \pm 1$. Aceste conditii ne dau urmatoarele posibilitati pentru T_r:

$$T_r = \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-j} \end{pmatrix} \quad sau \quad T_r = \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-j} \end{pmatrix},$$

unde ε reprezinta radacina de ordinul n a unitatii data de $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ iar exponentul j ia valori intre 0 si $n-1$.

Conditiile date de relatiile 3.1 alaturi de conditia de ireductibilitate, ne dau in final urmatoarele posibilitati de reprezentare liniara complexa ireductibila pentru grupul D_n:

$$T_r^{(j)} = \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-j} \end{pmatrix}, \quad T_s^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

unde indicele j ia valori in multimea $\overline{1, n-1}$.

Intr-adevar acestea sunt ireductibile, intrucat singurele subspatii de dimensiune 1 ce sunt invariate de $T_r^{(j)}$ sunt dreptele de coordonate, iar acestea nu sunt invariate de $T_s^{(j)}$.

Notand acum cu S matricea data de oricare dintre valorile $T_s^{(j)}$, se observa usor ca $ST^{(j)}S^{-1} = T^{(n-j)}$ pentru toti $j \in \overline{1, n-1}$. Asadar reprezentarile $T^{(j)}$ si $T^{(n-j)}$ sunt echivalente. Mai mult, cum valorile proprii corespunzatoare matricelor $T_r^{(j)}$ si $T_r^{(k)}$ difera pentru $0 < j \neq k < n/2$, avem ca reprezentarile $T^{(j)}$, $0 < j < n/2$ sunt ireductibile si neechivalente doua cate doua.

In cazul in care n este impar acestea sunt in numar de $\frac{n-1}{2}$, iar suma patratelor gradelor lor este $\frac{n-1}{2} \cdot 4 = 2n - 2$. Daca n este par ele sunt in numar de $\frac{n}{2} - 1$, iar suma patratelor gradelor lor este $(\frac{n}{2} - 1) \cdot 4 = 2n - 4$.

In concluzie, aceste reprezentari impreuna cu reprezentarile de gradul intai mai sus mentionate dau toate reprezentarile liniare complexe ireductibile ale grupului diedral D_n, iar tabelele de caractere complexe de mai sus se completeaza cu

	r^k	sr^k
$\chi'^{(j)}$	$2\cos\frac{2\pi jk}{n}$	0

unde indicele j ia valorile naturale $0 < j < n/2$.

Grupul D_{nh} reprezinta grupul izometriilor planului care invariaza un poligon regulat cu n varfuri. El este dat de produsul $D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, unde grupul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ este redat in plan de simetria fata de origine.

Conform propozitiei 2.7 de la pagina 26 asupra reprezentarilor liniare ireductibile ale produselor directe de grupuri, reprezentarile liniare complexe ireductibile ale grupului D_{nh} sunt produse tensoriale exterioare de reprezentari ireductibile ale lui D_n cu reprezentari ireductibile ale grupului $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq S_2$. Acestea din urma sunt date de reprezentarea triviala si reprezentarea alternanta al caror tabel de caractere este:

	(1)	(12)
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1

De aici, spre exemplu, caracterele $\chi'^{(j)}$ ale lui D_n dau prin tensorizare cu cele de mai sus urmatoarele caractere ireductibile pentru D_{nh}:

	$((1), r^k)$	$((1), sr^k)$	$((12), r^k)$	$((12), sr^k)$
$\chi''^{(j)}$	$2\cos\frac{2\pi jk}{n}$	0	$2\cos\frac{2\pi jk}{n}$	0
$\chi''^{(j)}$	$2\cos\frac{2\pi jk}{n}$	0	$-2\cos\frac{2\pi jk}{n}$	0

Capitolul 4

Aplicatii la teoria grupurilor finite: criterii de nesimplitate

Printre primele aplicatii teoretice ale reprezentarilor liniare de grupuri, si in special a teoriei caracterelor, s-au numarat o serie de rezultate ce vizeaza conditii suficiente in care un grup finit nu este simplu. Atat teorema matematicianului englez William Burnside ce va fi expusa in sectiunea urmatoare cat si criteriul lui F.G. Frobenius generalizat apoi de matematicianul german Helmut Wielandt reprezinta criterii clasice faimoase de nesimplitate pentru grupuri finite obtinute in mod esential cu ajutorul unor tehnici derivate din teoria caracterelor complexe. Primul rezultat mentionat a primit abia saizeci de ani mai tarziu o demonstratie care nu se foloseste de teoria reprezentarilor de grupuri si care este considerabil mai complicata[1], iar in cazul celui de-al doilea, pana in anul 1998 cel putin[2], nu s-a gasit o demonstratie care sa nu foloseasca reprezentari liniare de grupuri.

4.1 Teorema $p - q$ a lui W. Burnside; grupuri rezolubile de ordin ≤ 200

Ideea de plecare este urmatoarea: daca G este un grup finit presupus a fi simplu, atunci orice reprezentare liniara a sa netriviala este injectiva. Asadar, toate reprezentarile ireductibile ale grupului G, cu exceptia celei banale, pot fi privite ca incluziuni canonice ale unui subgrup simplu de matrici in grupuri de tipul $Gl_n(\mathbb{C})$. Dar in acest caz avem dezvoltata deja o intreaga teorie (a caracterelor), care constrange grupul G (ca subgrup de matrici) sa indeplineasca o serie de conditii numerice si algebrice (expuse in capitolul 2). Pentru anumite clase particulare bine alese de grupuri finite, aceste conditii se pot dovedi a fi imposibil de

[1] aceasta demonstratie ii apartine matematicianului american John Griggs Thompson
[2] in conformitate cu [10], pagina 371

indeplinit in ipoteza suplimentara a simplicitatii. Acestea fiind spuse, trecem mai departe la expunerea rezultatului anuntat in titlul acestei sectiuni, cu ajutorul urmatoarei leme.

Lema 4.1. *Fie G un grup finit oarecare si $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ o reprezentare liniara ireductibila de grad d a lui G de caracter χ si fie $g \in G$ un element pentru care vom nota cu g^G clasa sa de conjugare. Daca $(d, |g^G|) = 1$, atunci sau $\chi_g = 0$, sau T_g este o omotetie.*

Demonstraţie. Fie $H =< g >$. Cum H este abelian, $T_{|H}$ este o suma directa de reprezentari de gradul intai. Atunci, conform remarcei de la pagina 12, exista o baza a spatiului V in care reprezentarea matriceala asociata $t : G \longrightarrow Gl_d(\mathbb{C})$ sa aiba forma diagonala. In acesta baza, t_g are forma

$$t_g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}.$$

Daca toate elementele de pe diagonala sunt egale intre ele, atunci T_g este o omotetie. In caz contrar, fie $a := \chi_g/d$. Atunci, in conformitate cu proprietatea elementara (5) a caracterelor $|a| < 1$.

Cum numerele complexe χ_g si $\frac{|g^G|\chi_g}{d}$ sunt intregi algebrici si $(d, |g^G|) = 1$, adica $d\alpha + |g^G|\beta = 1$ pentru niste $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, avem ca numarul $a := \frac{\chi_g}{d} = \chi_g\alpha + \frac{|g^G|\chi_g}{d}\beta$ este intreg algebric.

Fie acum ε_d o radacina primitiva de ordinul d a unitatii si $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\varepsilon_d)$ extinderea Galois asociata. Evident, $a \in \mathbb{Q}(\varepsilon_d)$. Fie a^* produsul tuturor conjugatilor lui a in aceasta extindere, $a^* := \prod\limits_{\sigma} \sigma(a)$, unde σ ia valori in grupul Galois al extinderii de mai sus. In mod clar, $a^* \in \mathbb{Q}$. Pe de alta parte insa, cum χ_g este o suma de radacini de ordinul d ale unitatii, atunci acelasi lucru este valabil si pentru $\sigma(\chi)$, de unde avem ca a^* este un intreg algebric de modul < 1. Asadar $a^* = 0$, adica $a = 0$. $\square$

Teorema 4.2. (William Burnside, 1904)

Daca un grup finit G are o clasa de conjugare C cu $|C| = q^d > 1$ elemente, pentru un numar prim q atunci G nu este un grup simplu.

Demonstraţie. Presupunem ca un astfel de grup G ar fi simplu.

Fie T o reprezentare liniara ireductibila a sa de grad d si caracter χ diferita de reprezentarea triviala T_1. Atunci T este injectiva. Daca gradul d al lui T este prim cu $|C|$, atunci $\chi(C) = 0$, caci altfel $T(C) \subseteq C(T(G)) \simeq C(G) = \{e\}$, ceea ce ar contrazice injectivitatea lui T.

Fie acum $(T_i)_{1 \leq i \leq s}$ reprezentarile liniare complexe ireductibile ale lui G, unde T_1 este reprezentarea triviala, si $(\chi_i)_{1 \leq i \leq s}$ caracterele sale asociate.

Fie $T_{req} = d_1T_1 \oplus \cdots \oplus d_sT_s$ reprezentarea regulata a lui G si χ_{reg} caracterul ei. Atunci

$$\chi_{reg}(C) = 1 + \sum_{j=1}^{s} d_j\chi_j(C) = \sum_{j;\, q|d_j} d_j\chi_j(C).$$

Dar $C \neq \{e\}$, deci $\chi_{reg}(C) = 0$. De aici avem ca $1/q$ este un numar rational intreg algebric, deci intreg, adica $q = 1$. Contradictie! $\square$

Dam acum drept consecinta directa a acestui rezultat celebra teorema $p - q$ a lui W. Burnside.

Corolarul 4.3. (Teorema p-q a lui W. Burnside, 1904)
Orice grup G ce are p^aq^b elemente, cu p si q numere prime, este rezolubil.

Demonstraţie. Fie G un astfel de grup. Daca $p = q$ sau $a = 0$ sau $b = 0$, atunci afirmatia de mai sus rezulta usor din prima teorema a lui Sylow.

Fie deci $p \neq q$ si $a, b > 0$. Este suficient sa aratam ca G nu este simplu, intrucat in acest caz demonstratia poate fi completata prin inductie dupa gradul grupului.

Asadar, sa presupunem ca G ar fi simplu. Cautam sa aplicam teorema de mai inainte. Pentru aceasta este suficient sa examinam centralizatorul unui element bine ales. Mai exact, fie P un p-subgrup Sylow al lui G si $g \in C(P) \setminus \{e\}$. Atunci $P \subseteq C(G)$, de unde $|C_G(g)| = p^aq^c$ pentru un c natural $\leq b$.

Dar $c = b$, atunci $g \neq e \in C(G) \lhd G$, adica G nu este simplu. Daca $c < b$, atunci clasa de conjugare a lui g are q^{b-c} elemente si conform teoremei de mai sus avem iarasi ca G nu este simplu. Contradictie! $\square$

Restul acestei sectiuni este dedicata aplicarii acestei teoreme, impreuna ca inca doua corolare ale acesteia ce urmeaza a fi expuse, in scopul stabilirii unui rezultat cat mai precis asupra grupurilor rezolubile cu cel mult 200 de elemente.

Corolarul 4.4. *Orice grup G de ordin $p_1p_2p_3$ cu p_1, p_2 si p_3 numere prime este rezolubil.*

Demonstraţie. Fie G un astfel de grup. In virtutea teoremei p-q a lui W. Burnside, putem sa presupunem ca numerele prime P_i sunt diferite doua cate doua.

Fie n_i numarul p_i-subgrupurilor Sylow ale lui G. Daca vre-unul dintre ele este egal cu 1, sa zicem n_j, atunci subgrupul P_j asociat este normal in G si P_j, G/P_j sunt rezolubile in virtutea teoremei mai sus amintite. Rezulta deci ca G este rezolubil in acest caz.

Sa presupunem acum ca $n_i > 1$, pentru $i \in \{1, 2, 3\}$. Avem ca grupul G are $n_i(p_i - 1)$ elemente de ordinul p_i, asadar

$$|G| \geq 1 + n_1(p_1 - 1) + n_2(p_2 - 1) + n_3(p_3 - 1).$$

Putem presupune fara a restrange generalitatea ca $p_1 < p_2 < p_3$. Atunci din teorema lui Sylow asupra conditiilor indeplinite de numerele de subgrupuri Sylow ale unui grup, deducem usor ca

$$n_1 \geq p_2,\ n_2 \geq p_3 \text{ si } n_3 \geq p_1 p_2.$$

Majorand ordinul grupului G cu ajutorul inegalitatii de mai sus obtinem ca $p_1p_2p_3 \geq p_1p_2p_3 + (p_2 - 1)(p_3 - 1)$. Contradictie! $\square$

Corolarul 4.5. *Orice grup G ce are $2p^aq^b$ elemente este rezolubil.*

Demonstraţie. Fie G un astfel de grup. In virtutea teoremei p-q a lui W. Burnside, putem sa presupunem ca numerele prime 2, p si q sunt diferite doua cate doua.

Folosindu-ne de aceeasi teorema, e suficient sa demonstram ca G admite un grup de indice 2, intrucat in acest caz el ar fi normal si de ordin p^aq^b, deci rezolubil.

Fie pentru aceasta Γ morfismul de translatie la stanga al grupului G in multimea permutarilor elementelor lui G. Evident, Γ este un morfism injectiv si in plus daca σ este o permutare din imaginea acestui morfism, atunci fie σ nu are nici un punct fix, fie este permutarea identica.

Grupul G are ordin par, deci admite un element de ordinul 2, notat cu h. Atunci $\Gamma(h)$ este permutare fara puncte fixe de ordinul doi, deci un produs de p^aq^b transpozitii disjuncte. Asadar $\Gamma(h)$ este o permutare impara, deci morfismul de grupuri $T : G \longrightarrow \{1, -1\}$ obtinut prin compunerea morfismului Γ cu morfismul signatura este surjectiv. De aici concluzionam ca $G/Ker(T) \simeq \{1, -1\}$, de unde $[G : Ker(T)] = 2$. $\square$

Propozitia 4.6. (grupuri rezolubile de ordin ≤ 200)
Orice grup G de ordin $n \leq 200$, cu $n \neq 60, 120, 180; 168$ este rezolubil.

Demonstraţie. Vom aplica desigur teorema $p - q$ a lui W. Burnside impreuna cu cele doua corolare ale ei de mai sus pentru a elimina majoritatea cazurilor posibile.

Cazurile care raman de analizat sunt date de $n \in \{84, 132, 140, 156\}$. Inainte de a le considera pe rand, sa facem urmatoarea notatie:

Dat un grup finit, notam cu n_p numarul p-subgrupurilor Sylow ale acestuia. In cazul in care $n_p = 1$, notam cu H_p singurul p-subgrup Sylow al acestuia.

Fie G un grup cu $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ elemente.

Atunci din teoremele lui Sylow, $n_7 | 12$ si $n_7 \equiv 1 (\bmod 7)$, deci $n_7 = 1$. De aici avem ca $H_7 \lhd G$ si $|G/H| = 2^2 \cdot 3$. Deci G este rezolubil.

Se procedeaza perfect analog pentru cazurile $|G| = 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ si n_7, respectiv $|G| = 156 = 2^2 \cdot 3 \ \cdot 13$ si n_{13}.

In sfarsit, daca $|G| = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, sa presupunem ca $n_2, n_3, n_{11} > 1$ simultan. Atunci din teoremele lui Sylow avem ca $n_{11} = 12$, $n_3 \geq 4$ si $n_2 \geq 3$. Dar atunci G are cel putin $12(11 - 1)$ elemente de ordinul 11, cel putin $4(3 - 1)$ elemente de ordinul 4, si cel putin 5 elemente de ordin 1, 2 sau 4. Deci G are in total macar 133 de elemente. Contradictie! $\square$

Remarca 4.1. Sa justificam intr-o oarecare masura de ce grupurile cu 60, 120, 180 sau 168 nu fac obiectul propozitiei de mai sus.

Printre grupurile cu 60 de elemente se afla si grupul altern A_5 care este simplu, dupa cum bine se stie. Produsul direct al acestuia cu grupurile ciclice de 2, respectiv 3 elemente ne arata de ce enuntul de mai sus nu este intotdeauna adevarat si pentru grupurile de ordin 120 respectiv 180.

In ceea ce priveste cazul grupurilor cu 168 de elemente, printre ele se afla si grupul $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ – grupul proiectiv special liniar de grad 2 peste corpul cu 7 elemente – grup care este simplu.

4.2 Caractere induse; criteriul de nesimplitate Frobenius-Wielandt

Inainte de a da cel de-al doilea rezultat clasic bazat pe teoria caracterelor ce stabileste conditii suficiente pentru ca un grup sa nu fie simplu, mai avem nevoie sa introducem o notiune ce apartine domeniului reprezentarilor liniare de grupuri. Ea a fost considerata pentru prima oara de G. Frobenius si are la baza o intrebare naturala pe care o detaliem in paragraful ce urmeaza.

Data o reprezentare liniara complexa $T : G \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$ a unui grup G si $H \leq G$ un subgrup al lui G, putem intotdeauna considera restrictia acestei reprezentari $T_{|H} : H \longrightarrow Aut({}_{\mathbb{C}}V)$. Deci pornind de la o reprezentare liniara a unui grup, putem construi reprezentari liniare ale subgrupurilor sale prin restrangere la acestea. Intrebarea care se pune este daca putem solutiona in vre-un fel problema inversa. Cu alte cuvinte, se poate construi o reprezentare liniara a unui grup plecand de la o reprezentare liniara a unui subgrup al sau?

Cheia unui raspuns la aceasta intrebare sta in transpunera acesteia in limbaj de module. In acest caz, intrebarea care se pune este daca pentru un $\mathbb{C}[H]$-modul ${}_{\mathbb{C}[H]}M$ putem extinde inelul de scalari $\mathbb{C}[H]$ la inelul $\mathbb{C}[G]$? Intrebarea fiind astfel pusa, raspunsul este acum usor de dat cu ajutorul produsul tensorial de module, dupa cum vom vedea in definitia ce urmeaza. Ceea ce este de remarcat aici este faptul ca insasi notiunea de produs tensorial de module a aparut in urma incercarii de a formaliza constructia ce raspunde la intrebarea de mai sus (vezi si nota de subsol 5 de la pagina 26).

Definitia 4.1. Fie H un subgrup al unui grup finit G. Daca ${}_{\mathbb{C}[H]}M$ este un $\mathbb{C}[H]$-modul stang, numim $\mathbb{C}[G]$-*modulul indus de* $\mathbb{C}[H]$-*modulul* M si notam cu M^G constructia:

$$_{\mathbb{C}[G]}M^G := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} M.$$

In aceste conditii, daca ${}_{\mathbb{C}[H]}M$ da reprezentarea liniara T a lui H, atunci ${}_{\mathbb{C}[G]}M^G$ da o reprezentare a lui G notata cu T^G si numita *reprezentarea indusa* de T pe G.

In continuare vom descrie in mod explicit aceasta constructie in cazul reprezentarilor liniare de grupuri finite, si ii vom determina caracterul in functie de caracterul reprezentarii de la care se porneste.

Sa observam pentru inceput ca inelul $\mathbb{C}[G]$, vazut ca un $\mathbb{C}[H]$-modul este liber de rang $t := [G : H]$. Intr-adevar, ${}_{\mathbb{C}[H]}\mathbb{C}[G] := g_1\mathbb{C}[H] \oplus \cdots \oplus g_t\mathbb{C}[H]$ pentru orice sistem complet si independent de reprezentanti $\{g_1, \ldots, g_t\}$ ai lui G in raport cu relatia de echivalenta stanga modulo H, deoarece orice combinatie $\mathbb{C}$-liniara formala de elemente din G se scrie in mod unic ca o suma dupa i de combinatii $\mathbb{C}$-liniare formale de elemente din g_iH.

Asadar, M^G privit drept $\mathbb{C}[H]$-modul stang admite scrierea

$$ {}_{\mathbb{C}[H]}M^G = (g_1 \otimes M) \oplus \cdots \oplus (g_t \otimes M). $$

De aici avem ca M^G privit drept spatiu vectorial peste corpul numerelor complexe are drept baza multimea $(g_i \otimes e_j)_{i,j}$, unde $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ este o baza pentru spatiul vectorial ${}_{\mathbb{C}}M$.

Cu notatiile de mai sus, fie acum $t(h) = (a_{ij}(h))_{1\leq i,j\leq r}$ matricea asociata reprezentarii T in baza $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ data de $h \cdot e_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ji}(h)e_j$. Intentionam sa determinam matricea $t^G(h)$ a reprezentarii induse T^G.

Tinand seama ca produsul tensorial are loc peste $\mathbb{C}[H]$, pentru orice g, g_i si e_j pentru care urmatoarele egalitati au sens, are loc

$$ g(g_i \otimes e_j) = gg_i \otimes e_j = g_kh \otimes e_j = g_k \otimes \sum_{p=1}^{r} a_{pj}(h)e_p = \sum_{p=1}^{r} a_{pj}(h)g_k \otimes e_p, $$

unde g_k si h sunt date de scrierea unica $gg_i = g_kh$ furnizata de sistemul complet si independent de reprezentanti $\{g_1, \ldots, g_t\}$ al lui G in raport cu relatia de echivalenta la stanga modulo H.

Asadar daca notam cu

$$ \tilde{a}_{ij}(g) \begin{cases} a_{ij}(g)\,, & daca \;\; g \in H \\ 0\,, & daca \;\; g \in G \setminus H \end{cases} $$

atunci avem ca

$$ g(g_i \otimes e_j) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{t} \tilde{a}_{pj}(g_q^{-1}gg_i)g_q \otimes e_p\,. $$

Concluzionam ca matricea t^G a reprezentarii induse T^G este data de

$$ t^G(g) = \begin{pmatrix} \tilde{t}(g_1^{-1}gg_1) & \ldots & \tilde{t}(g_1^{-1}gg_t) \\ \tilde{t}(g_2^{-1}gg_1) & \ldots & \tilde{t}(g_2^{-1}gg_t) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{t}(g_t^{-1}gg_1) & \ldots & \tilde{t}(g_t^{-1}gg_t) \end{pmatrix}, $$

unde

$$\tilde{t}(g)\begin{cases} t(g)\,, & daca \quad g \in H \\ \mathbb{O}_{r\times r}\,, & daca \quad g \in G \setminus H \end{cases}$$

In ceea ce priveste caracterul reprezentarii induse, daca notam cu χ caracterul reprezentarii T, cu χ^G caracterul reprezentarii T^G si cu $\widetilde{\chi}(g) := Tr(\tilde{t}(g))$ atunci in mod clar avem ca $\chi^G(g) = \sum\limits_{i=1}^{t} \widetilde{\chi}(g_i^{-1} g g_i)$.

Dupa cum se observa, formula de mai sus depinde de reprezentantii $(g_i)_{1\le i\le t}$. Pentru obtine o expresie a caracterului reprezentarii induse independenta de alegerea unui sistem de reprezentanti ai lui G in raport cu relatia de echivalenta stanga modulo H, sa remarcam ca

$$\sum_{s\in G} \widetilde{\chi}(s^{-1}gs) = \sum_{i;h\in H} \widetilde{\chi}((g_i h)^{-1} g (g_i h)) = \sum_{i;h\in H} \widetilde{\chi}(g_i^{-1} g g_i) = |H| \cdot \chi^G(g),$$

unde a doua egalitate e data de faptul ca functia $\widetilde{\chi}$ este functie centrala.

In final obtinem

$$\chi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{s\in G} \widetilde{\chi}(s^{-1}gs). \tag{4.1}$$

Urmatorul rezultat este de o mare utilitate in calcule si arata legatura stransa care exista intre caracterele reprezentarilor liniare de subgrupuri si caracterele induse de acestea.

Teorema 4.7. (teorema de reciprocitate a lui G. FROBENIUS)

Fie G un grup finit si H un subgrup al sau. Daca ψ este un caracter al unei reprezentari liniare complexe a grupului H iar χ este un caracter al unei reprezentari liniare complexe a grupului G, atunci are loc egalitatea:

$$\langle \chi, \psi^g \rangle_G = \langle \chi_{|H}, \psi \rangle_H, \tag{4.2}$$

unde formele biliniare sunt calculate in grupurile G, respectiv H.

Demonstrație. Ne vom folosi de formula 4.1 abia obtinuta.

Avem ca

$$\langle \chi, \psi^g \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} \psi^G(g) = \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{g,s\in G} \overline{\chi(g)} \widetilde{\psi}(s^{-1}gs),$$

unde $\widetilde{\psi}_{|H} = \psi$, si $\widetilde{\psi}_{|G\setminus H} \equiv 0$. Cum functia χ este centrala avem ca

$$\langle \chi, \psi^g \rangle_G = \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{s\in G} \sum_{g\in G} \overline{\chi(s^{-1}gs)} \widetilde{\psi}(s^{-1}gs) = \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{s\in G} \sum_{g'\in G} \overline{\chi(g')} \widetilde{\psi}(g') =$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{g'\in G} \overline{\chi(g')} \widetilde{\psi}(g') = \frac{1}{|H|} \sum_{g'\in H} \overline{\chi(g')} \psi(g') = \langle \chi_{|H}, \psi \rangle_H,$$

ceea ce in mod evident incheie demonstratia. □

Dupa aceasta digresiune in raport cu scopul propus al acestui capitol, suntem acum in masura sa enuntam si sa dam demonstratia completa a criteriului de nesimplitate datorat matematicienilor germani G. Frobenius si H. Wielandt. Acesta este probabil cel mai faimos criteriu de nesimplitate, in special cazul particular ce ii urmeaza.

Dupa cum vom vedea in cele imediat urmatoare, caracterele induse joaca un rol indispensabil pe parcursul demonstratiei acestui rezultat.

Teorema 4.8. (H. WIELANDT, $\geq$1935)

Fie G un grup finit si H, K doua subgrupuri ale sale astfel incat $K \lhd H$ si $H \cap gHg^{-1} \leq K$ pentru toti $g \in G \backslash H$. Notam cu N multimea tuturor elementelor lui G care nu se afla in nici una din conjugatele multimii $H \setminus K$. Atunci N este un subgrup normal al lui G astfel incat $G = HN$ si $H \cap N = K$.

Demonstrație.

(i) Sa observam pentru inceput ca daca $H = K$ atunci $N = G$ si rezultatul este cu siguranta adevarat. Presupunem, deci de acum inainte ca $K < H$. Sa notam cu $h := |H|$ si $k := |K|$.

(ii) Este suficient sa demonstram ca N este subgrup. Intr-adevar, daca aceasta afirmatie ar fi adevarata, atunci in mod clar $N^g := gNg^{-1} = N$ pentru toti $g \in G$.

Mai mult, daca $g \in N_g(H)$, atunci $K < H = H \cap H^g$, deci $g \in H$ potrivit ipotezei, de unde rezulta ca H este auto-normalizant. Asadar daca $\{g_1, \ldots g_t\}$ este un sistem complet si independent de reprezentanti ai lui G in raport cu relatia de echivalenta stanga modulo H, atunci $H^{g_1}, \ldots, H^{g_t}$ sunt conjugatii distincti ai lui H in G. Folosind ipoteza, avem ca multimile $(H \setminus K)^{g_i}$ sunt mutual disjuncte si ca pentru orice $g \in G$, $(H \setminus K)^g = (H \setminus K)^{g_j}$, unde $g \equiv g_j (\text{mod } H)$. Asadar $|N| = |G| - |\bigcup_{i=1}^{t} (H \setminus K)^{g_i}| = t \cdot k$. Pe de alta parte $K \cap (H \setminus K)^g = \emptyset$ pentru toti $g \in G$, de unde avem ca $K \leq H \cap N$. Incluziunea inversa fiind clara, avem egalitate. De aici $|HN| = |H| \cdot |N| / |H \cap N| = |G|$, deci $HN = G$.

(iii) *Introducem teoria caracterelor.*

Sa consideram acum o reprezentare liniara complexa ireductibila a lui H de nucleu cel putin K (o asemenea reprezentare exista conform remarcei 3.1 de la pagina 30) al carui caracter il notam cu χ. Mai notam cu $\chi^{(1)}$ caracterul trivial pe H.

Fie functia

$$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi = \chi_e \cdot \chi^{(1)} - \chi.$$

Atunci $\varphi \in \mathcal{F}(H, \mathbb{C})$ si este nula pe K. Definim functia

$$\varphi^G : G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi^G = \chi_e \cdot (\chi^{(1)})^G - \chi^G.$$

Aceasta functie face parte in mod clar din multimea $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$.

Scopul punctelor (iv)–(vi) este de a arata ca χ^G este caracter ireductibil al lui G.

(iv) *Aratam ca* $(\varphi^G)_{|H} = \varphi$.

Conform formulei 4.1,

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{h} \sum_{s \in G} \varphi(sgs^{-1}),$$

unde se intelege ca $\chi^{(1)}$ si χ sunt nule in afara lui H. Fie acum $g \in H$ astfel incat $\varphi(sgs^{-1}) \neq 0$. Atunci sgs^{-1} trebuie sa apartina multimii $H \setminus K$, intrucat φ este nula pe $G \setminus H$ si pe K. In acest caz $sgs^{-1} \in (H \cap H^{s^{-1}}) \setminus K$, deci $s \in H$. Asadar, $\varphi^G(g) = \frac{1}{h} \sum\limits_{s \in H} \varphi(sgs^{-1}) = \varphi(g)$, intrucat φ este constanta pe clasele de conjugare ale lui H.

(v) *Aratam ca* $\langle \varphi^G, \varphi^G \rangle_G = \langle \varphi, \varphi \rangle_H = \chi_e^2 + 1$.

Cum φ este nula pe N, la fel este si φ^G. Asadar

$$\langle \varphi^G, \varphi^G \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi^G(g)\overline{\varphi^G(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G \setminus N} \varphi^G(g)\overline{\varphi^G(g)}.$$

Din faptul ca φ^G este constanta pe clasele de conjugare ale lui G, avem in particular ca $\varphi^G(g_i g g_i^{-1}) = \varphi^G(g)$ pentru toti $g \in H$. Cum $G \setminus N$ este reuniunea tuturor multimilor $(H \setminus K)^{g_i}$, are loc ca

$$\langle \varphi^G, \varphi^G \rangle_G = \frac{[G : H]}{|G|} \sum_{g \in H} \varphi^G(g)\overline{\varphi^G(g)} = \langle \varphi, \varphi \rangle_H.$$

In final avem ca $\langle \varphi, \varphi \rangle_H = \chi_e^2 + 1$ din insasi definitia functiei φ.

(vi) *Aratam ca χ este restrictia unui caracter ireductibil χ' al lui G.*

Fie $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(s)}$ caracterele complexe ireductibile ale lui G, unde $\chi^{(1)}$ este caracterul trivial. Atunci $\varphi^G = \sum\limits_{i=1}^{s} c_i \chi^{(i)}$, unde

$$c_i = \langle \varphi^G, \chi^{(i)} \rangle_G = \chi_e \langle (\chi^{(1)})^G, \chi^{(i)} \rangle_G - \langle \chi^G, \chi^{(i)} \rangle_G \in \mathbb{Z}.$$

Pe de alta parte, folosindu-ne de teorema de reciprocitate a lui G. Frobenius, obtinem ca

$$c_1 = \chi_e\langle(\chi^{(1)})^G, \chi^{(1)}\rangle_G - \langle\chi^G, \chi^{(1)}\rangle_G = \chi_e\langle\chi^{(1)}, \chi^{(1)}\rangle_H - \langle\chi, \chi^{(1)}\rangle_H = \chi_e.$$

Folosindu-ne de (v), avem ca $c_1 = \chi_e$, $c_i = \pm 1$ pentru un i, si in rest toti ceilalti c_j sunt nuli. Asadar $\chi^G = \chi_e\chi^{(1)} \pm \chi^{(i)}$. Cum din (iv) avem ca $\varphi^G(e) = \varphi(e) = 0$, obtinem ca semnul negativ este cel bun. In acest caz $\chi^{(i)}(g) = \chi_e\chi^{(1)} - \varphi^G(g) = \chi_e\chi^{(1)} - \varphi(g) = \chi(g)$ pentru toti $g \in H$. Asadar χ este restrictia caracterului ireductibil $\chi^{(i)}$ al grupului G. Deci putem sa luam pe post de $\chi' := \chi^{(i)}$

(vii) *Finalizarea demonstratiei*

Fie S multimea tuturor caracterelor complexe netriviale ireductibile ale lui H de nucleu cel putin K. Fie

$$I := \bigcap_{\chi \in S} Ker(\chi'),$$

unde $'$ defineste asocierea de la punctul (vi).

Evident $I \lhd G$. Vom arata ca $I = N$.

Fie $g \in N$ si $\chi \in S$. Fie χ' caracterul ireductibil al lui G asociat lui χ si $\varphi' = \varphi^G$ data ca in (iii). Atunci $\varphi^G(g) = 0$, de unde $\chi'(g) = \chi^{(1)}(e)$, adica $g \in Ker(\chi')$ – conform proprietatii elementare (6) a caracterelor (pagina 18). Concluzionam ca $N \subseteq I$.

Fie acum $g \in H \setminus K$. Atunci exista o reprezentare ireductibila netriviala a lui H de nucleu cel putin K, dar al carei nucleu nu contine elementul g (in caz contrar nucleul reprezentarii regulate a lui H/K ar contine gK; intrucat nucleul acesteia este K, am avea ca $g \in K$, ceea ce ar contrazice ipoteza de plecare). In cazul unei astfel de reprezentari de caracter $\widetilde{\chi}$, avem ca $g \notin Ker(\widetilde{\chi})$, de unde $g \notin Ker(\widetilde{\chi}')$, adica $g \notin I$. Concluzionam ca I nu contine nici un element din multimile $(H \setminus K)^g$, deci $I \subseteq N$. □

Corolarul 4.9. (G. Frobenius, ~1900)

Fie G un grup finit si H un subgrup al sau astfel incat $H \cap gHg^{-1} \leq \{e\}$ pentru toti $g \in G \setminus H$. Notam cu N multimea tuturor elementelor lui G care nu se afla in nici una din conjugatele multimii $H \setminus \{e\}$. Atunci N este un subgrup normal al lui G astfel incat $G = HN$ si $H \cap N = \{e\}$.

Demonstrație. In mod clar, acest rezultat este cazul particular $K = \{e\}$ al teoremei precedente. □

Remarcam la finalul acestui capitol ca grupurile care indeplinesc conditiile corolarului de mai sus, numite si grupuri Frobenius, au suscitat un interes deosebit in cadrul teoriei grupurilor finite. Rezultate profunde legate (sau inspirate) de acestea au fost descoperite de matematicieni precum J. G. Thompson sau Hans Julius Zassenhaus.

Anexa A

Dezvoltari ulterioare: Teoremele lui R. Brauer si E. Artin

In anul 1947 matematicianul german Richard Dagobert Brauer publica o serie de rezultate profunde ce stabilesc legaturi clare intre caracterele complexe ireductibile ale unui grup finit si caracterele complexe ireductibile ale anumitor subgrupuri ale grupului dat. Pe scurt, rezultatele lui R. Brauer dau un raspuns intr-un mod total netrivial la problema construirii caracterelor complexe ireductibile ale unui grup finit dat din caractere complexe ireductibile ale anumitor subgrupuri ale grupului.

Una din consecintele importante ale acestor rezultate este data de o teorema a lui Emil Artin.

Dam in cele ce urmeaza, impreuna cu definitiile de rigoare, enunturile acestor rezultate.

Definitia A.1.

(i) Fie G un grup si p un numar prim. Un element $g \in G$ se numeste *p-regulat* daca g este de ordin finit si p nu divide ordinul lui g;

(ii) Fie G un grup si p un numar prim. Un subgrup $E \leq G$ se zice *p-elementar* daca exista un element p-regulat g al lui G si un p-subgrup (de exponent nu neaparat nenul) P al centralizatorului $C_G(g)$ al lui g astfel incat $E =< g > P$;

(iii) Grupul G se numeste *p-elementar* daca G este izomorf cu un grup de forma $C \times B$, unde C este un grup finit ciclic de ordin prim cu p si B este un p-grup (de exponent nu neaparat nenul);

(iv) Un subgrup (respectiv un grup) se numeste *elementar* daca exista un numar prim p astfel incat el sa fie p-elementar.

Legatura dintre notiunile de subgrup elementar si grup elementar este data de urmatorul rezultat.

Propozitia A.1. *Orice subgrup p-elementar al unui grup G este grup p-elementar si orice subgrup E al lui G care este un grup p-elementar este un subgrup p-elementar al lui G.*

Teorema A.2. (R.D. Brauer - forma slaba)

Fie G un grup finit. Atunci orice caracter complex al grupului G este o combinatie liniara cu coeficienti intregi de caractere induse ale caracterelor ireductibile ale subgrupurilor elementare ale lui G.

Teorema A.3. (R.D. Brauer - forma tare)

Fie G un grup finit. Atunci orice caracter complex al grupului G este o combinatie liniara cu coeficienti intregi de caractere induse ale caracterelor de gradul intai ale subgrupurilor elementare ale lui G.

Urmatoarea teorema este o aplicatie directa a rezultatelor lui R.D. Brauer.

Teorema A.4. (E. Artin)

Fie G un grup finit. Atunci orice caracter complex al lui G este o combinatie liniara cu coeficienti rationali de caractere induse ale subgrupurilor ciclice ale sale.

O aplicatie importanta a teoremei lui R.D. Brauer este un urmatorul rezultat enuntat sub forma de ipoteza de H. Maschke in jurul anului 1900, probat de I. Schur in cazuri particulare, si demonstrat in toata generalitatea lui de catre R.D. Brauer in anul 1945.

Teorema A.5. (R.D. Brauer, 1945)

Fie G un grup finit de exponent n si ε o radacina primitiva de ordinul n a unitatii. Atunci $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ este un corp de descompunere al grupului G.

Bibliografie

[1] T.Albu, N. Manolache, *19 lectii de teoria grupurilor*, Tipografia Universitatii Bucuresti, Bucuresti, 1987

[2] W. Fulton, J. Harris *Representation Theory: A First Course*, Springer-Verlag, New-York, 1991

[3] T.W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New-York, 1974

[4] I.D. Ion, R. Nicolae, *Algebra* - editia a III-a, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1981

[5] S. Mac Lane, *Mathematics, form and function*, Springer-Verlag, New-York, 1986

[6] D. Popescu, C. Vraciu, *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Stiintifica si Enciclopedica, Bucuresti, 1986

[7] M. B. Powell, G. Higman, editori, *Finite Simple Groups*, Academic Press, Londra, 1971

[8] D.J.S. Robinson *A course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995

[9] J.-P. Serre *Representations lineaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967

[10] T. Y. Lam, *Representations of Finite Groups:A Hundred Years, Part I*, Notices of the AMS - volumul 45, numarul 3, martie 1998

[11] T. Y. Lam, *Representations of Finite Groups:A Hundred Years, Part II*, Notices of the AMS - volumul 45, numarul 4, aprilie 1998

[12] `www-history.mcs.st-andrews.ac.uk`, (arhiva MacTutor de istorie a matematicii), (vizualizat la 30 mai 2007)